بسم الله الرّحمن الرّحیم

هندسه (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۶

فصل اوّل

ترسیم‌های هندسی و استدلال

هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

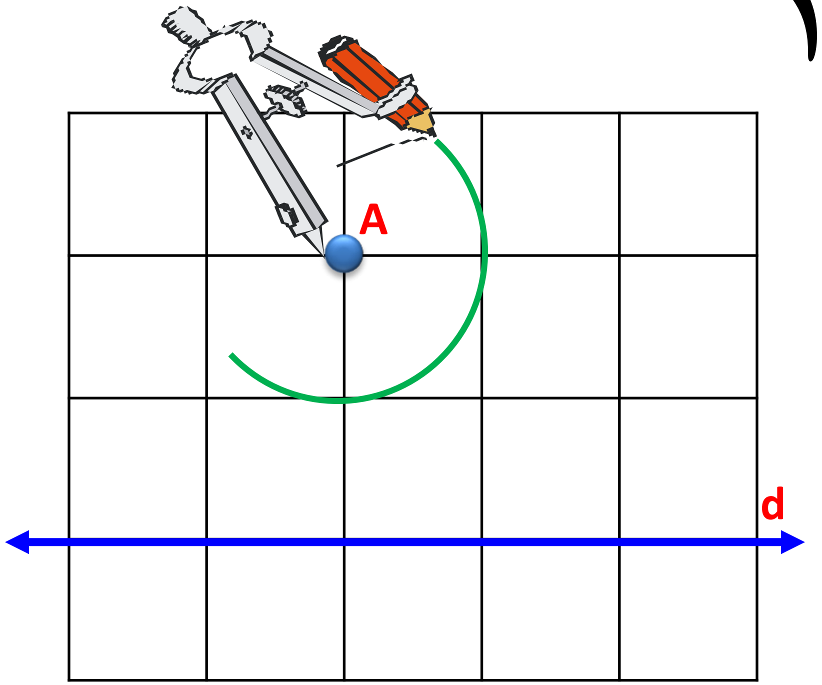
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

بخش اول :ترسیم های هندسی

یکی از بخش های هندسه رسم کردن خطوط و اشکال هندسی است. این بخش از هندسه کاربرد زیادی در نقشه کشی ساختمان طراحی صنعتی، معماری، رسم فنی و … دارد.

در این بخش منظور از ترسیم هندسی آن دسته از ترسیم ها است که منحصرا با خطکش و پرگار انجام می شود و استفاده از ابزارهایی مانند گونیا و نقاله در آنها مجاز نمی باشد.

فعالیت ۱

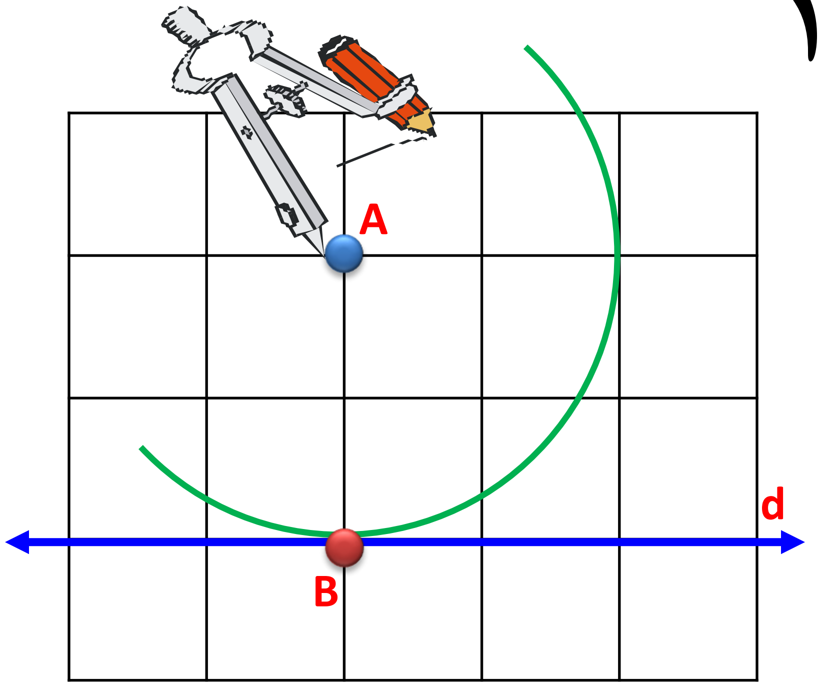


خط d و نقطه A به فاصله ۲ سانتی متر از آن را درنظر بگیرید.

الف : به کمک پرگار نقطه ای روی خط d تعیین کنید که فاصله اش از A برابر ۱ سانتی متر باشد.

پاسخ : امکان پذیر نیست .

فعالیت ۱



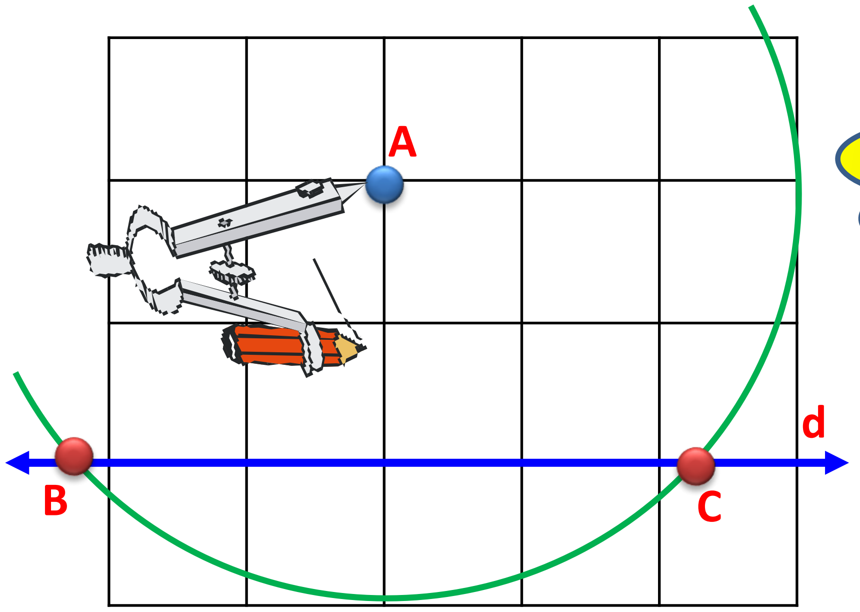
ب : به کمک پرگار نقطه ای روی خط d تعیین کنید که فاصله اش از A برابر ۲ سانتی متر باشد.

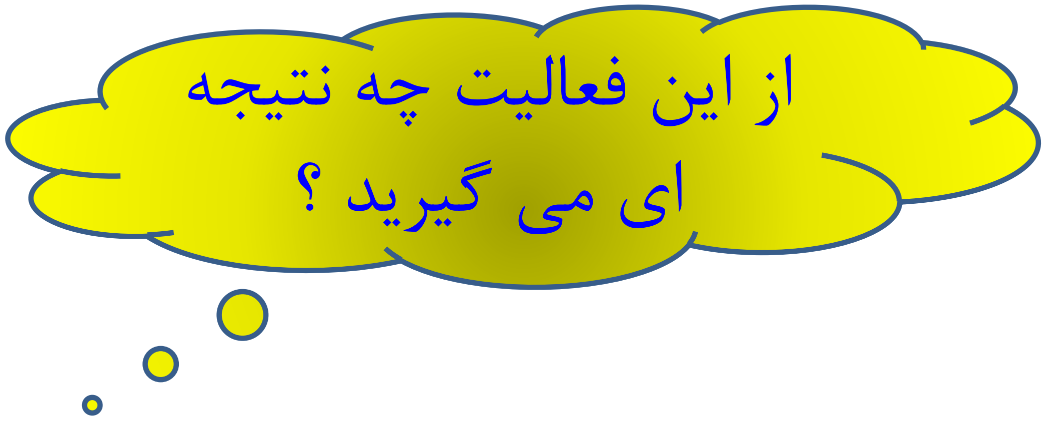
پاسخ : می توان یک نقطه با این ویژگی روی خط d تعیین کرد.

فعالیت ۱

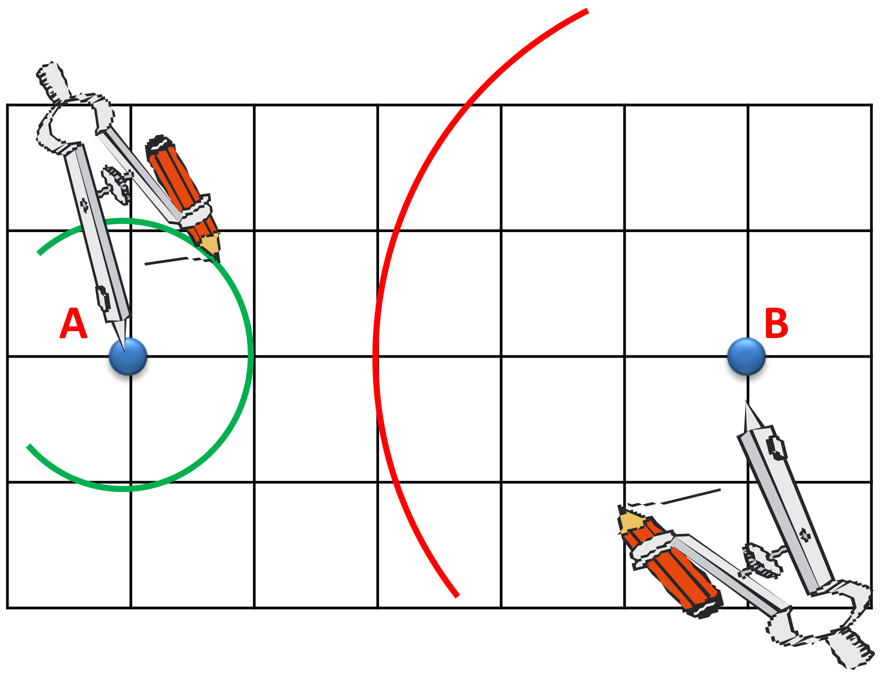
ج : به کمک پرگار نقطه ای روی خط d تعیین کنید که فاصله اش از A برابر ۳ سانتی متر باشد.

پاسخ : می توان دو نقطه با این ویژگی روی خط d تعیین کرد.





فعالیت ۲



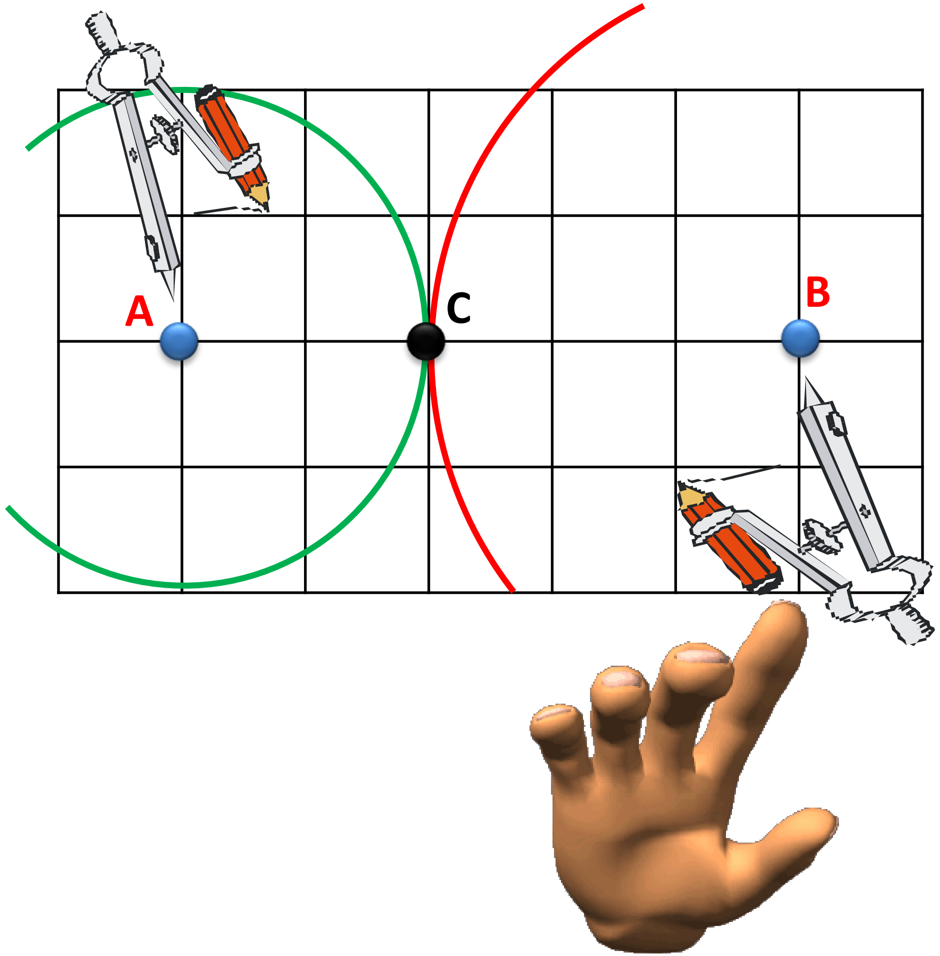
دو نقطه ی A و B به فاصله ۵ سانتی متر از یکدیگر را در نظر بگیرید .

الف : آیا می توان نقطه ای تعیین کرد که از A به فاصله ۱ و از B به فاصله ۳ سانتی متر باشد ؟

پاسخ: امکان پذیر نیست.

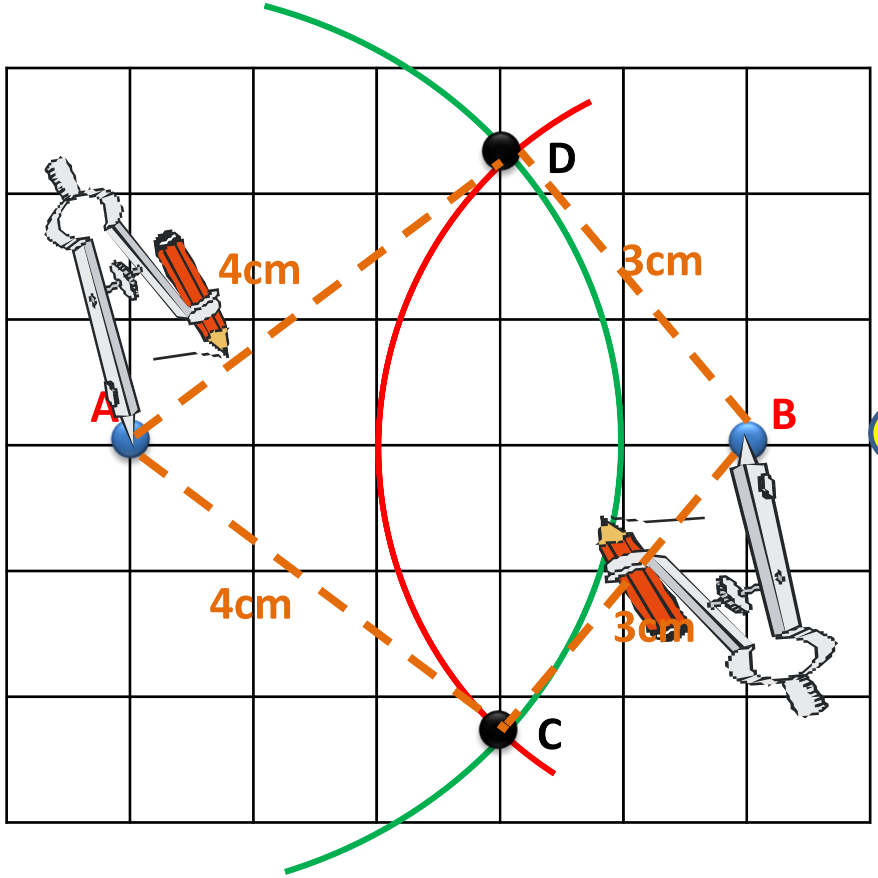
ب : آیا می توان نقطه ای تعیین کرد که از A به فاصله ۲ و از B به فاصله ۳ سانتی متر باشد ؟

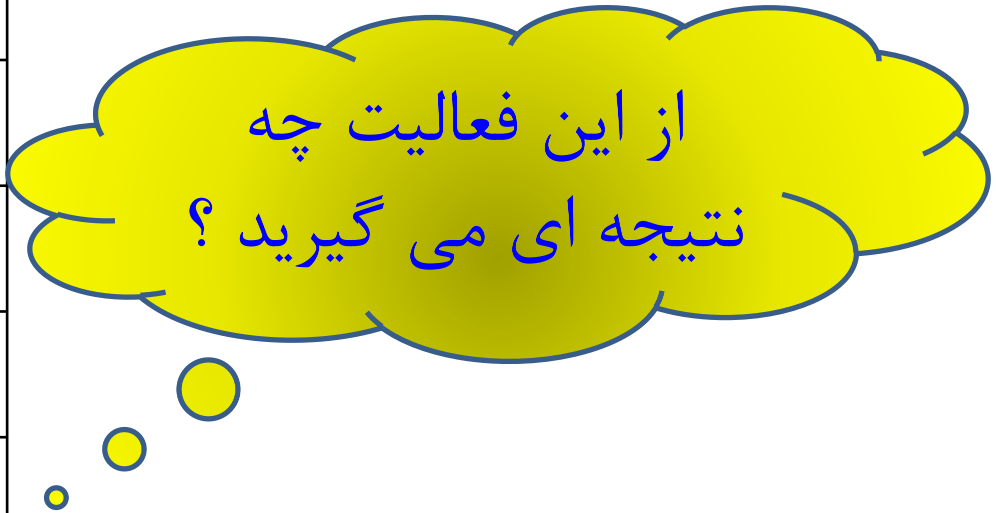
ب : فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد .و این نقطه با A و B روی یک خط راست قرار دارند



ج : آیا می توان نقطه ای تعیین کرد که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۳ سانتی متر باشد ؟

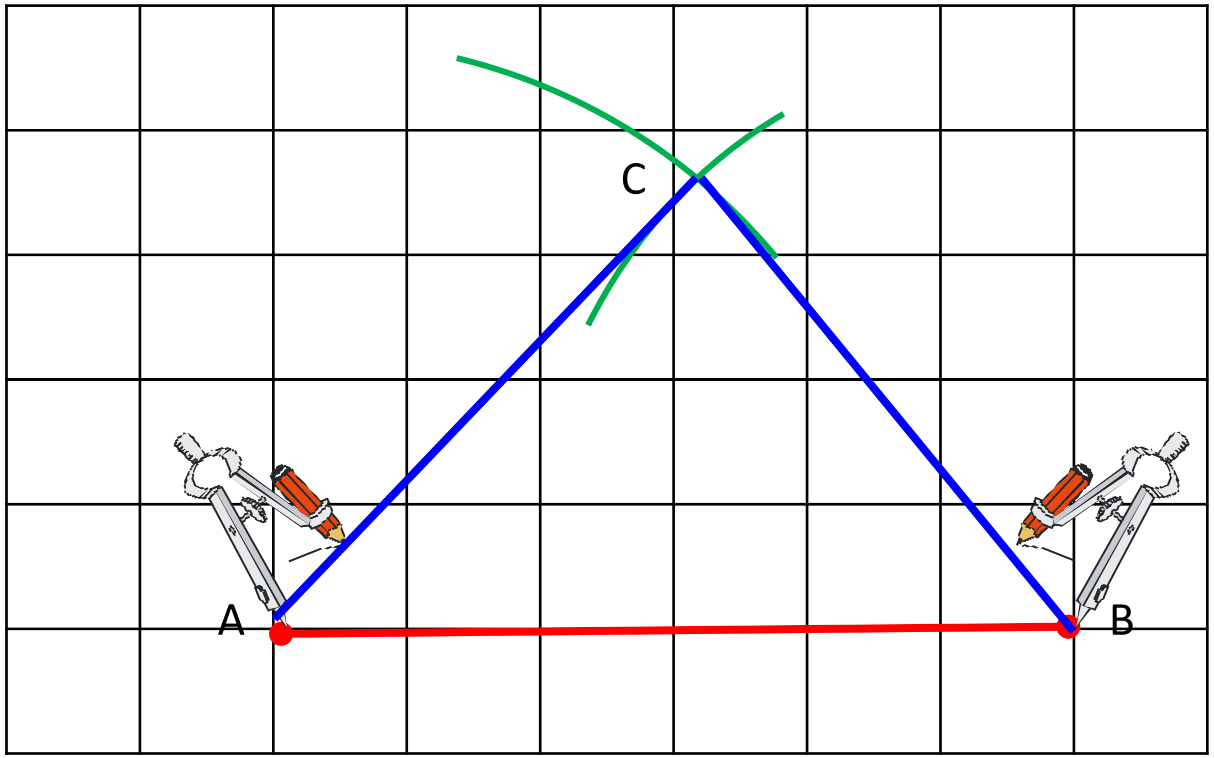
پاسخ : فقط دو نقطه با این ویژگی وجود دارد .و این نقطه ها با A و B روی یک خط راست قرار ندارند.





کاردرکلاس

۱. توضیح دهید چگونه می توان مثلث با اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد ؟

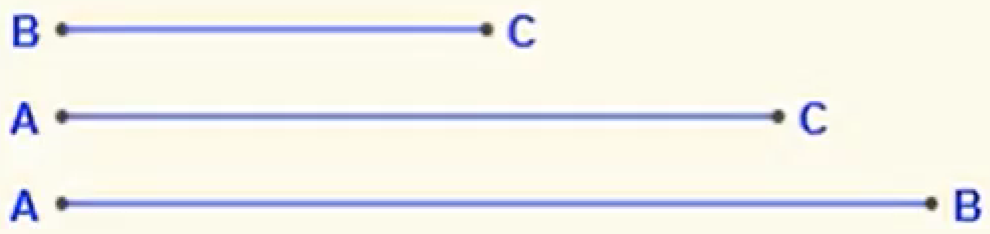


۱. پاره خط AB به طول ۶ سانتی متر را رسم می کنیم

۲. به مرکز A و شعاع ۵ سانتی متر کمانی رسم می کنیم.

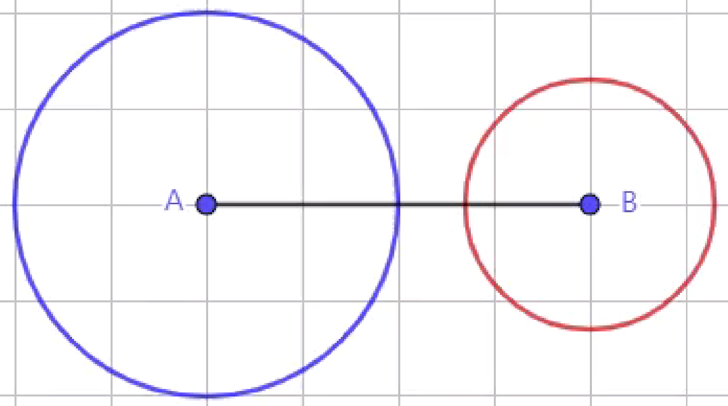
۳. به مرکز B و شعاع ۴ سانتی متر کمانی رسم می کنیم.

۴. محل تقاطع دو کمان را به A و B وصل می کنیم.


B C
A C
A B

$a = 2$

$b = 1.3$



$$AB = 4$$

$$a + b = 2 + 1.3 = 3.3$$

$$|a - b| = |2 - 1.3| = 0.7$$

$$a + b < AB$$

کاردرکلاس

۲. نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. نقطه ای پیدا کنید که از A به فاصله ....x... سانتی متر و از B به فاصله ....y..... سانتی متر باشد.

جاهای خالی را چنان کامل کنید که سوال فوق :

الف : دو جواب داشته با شد . ب : فقط یک جواب داشته باشد . ج : هیچ جوابی نداشته باشد.

پاسخ :

الف :کافی است مقادیر را چنان انتخاب کنیم که $|x-y|<7<x+y$

ب :کافی است مقادیر را چنان انتخاب کنیم که $|x-y|=7$ یا $x+y=7$

ج :کافی است مقادیر را چنان انتخاب کنیم که $|x-y|>7$ یا $x+y<7$

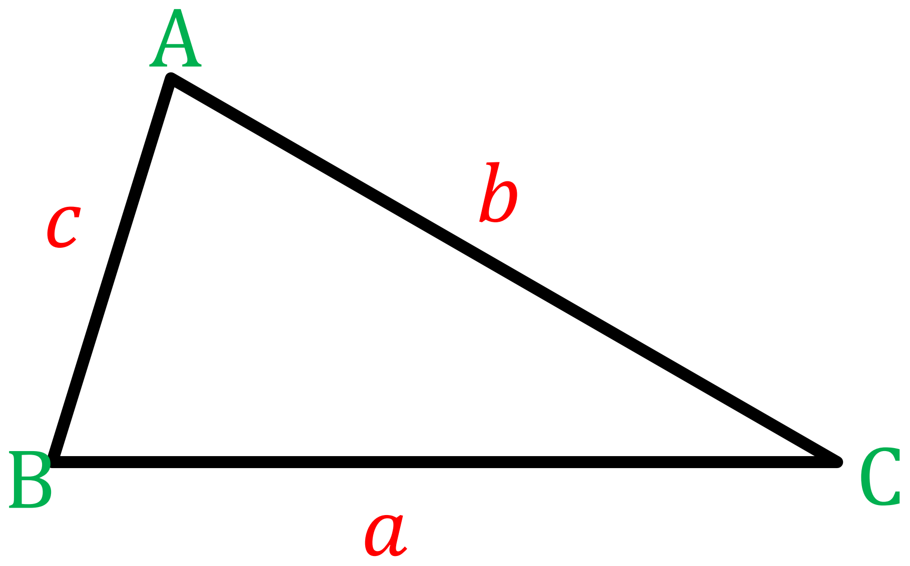
نتیجه

اگر اعداد a ,b ,c اندازه های اضلاع یک مثلث باشند.آنگاه :

$$|a-b| < c < a+b$$

$$|a-c| < b < a+c$$

$$|b-c| < a < b+c$$



مثال

حدود m را چنان تعیین کنید که اعداد $3\ ,m,4$ اندازه های اضلاع یک مثلث باشند.

پاسخ

$$|3-4|<m<3+4$$

$$\to 1<m<7$$

مثال آیا مثلثی وجود دارد که اندازه اضلاع آن 5و3و2 باشند ؟

پاسخ خیر ، زیرا :

$$2+3 \ngtr 5$$

مثال ۳ اگر x یک عدد صحیح باشد کمترین مقدار ممکن برای x در شکل مقابل چقدر است ؟

پاسخ

$$|a-b| < c < a+b$$

$$\Delta ABD : |7-13| < 3x-1 < 7+13$$

$$\Rightarrow 6 < 3x-1 < 20$$

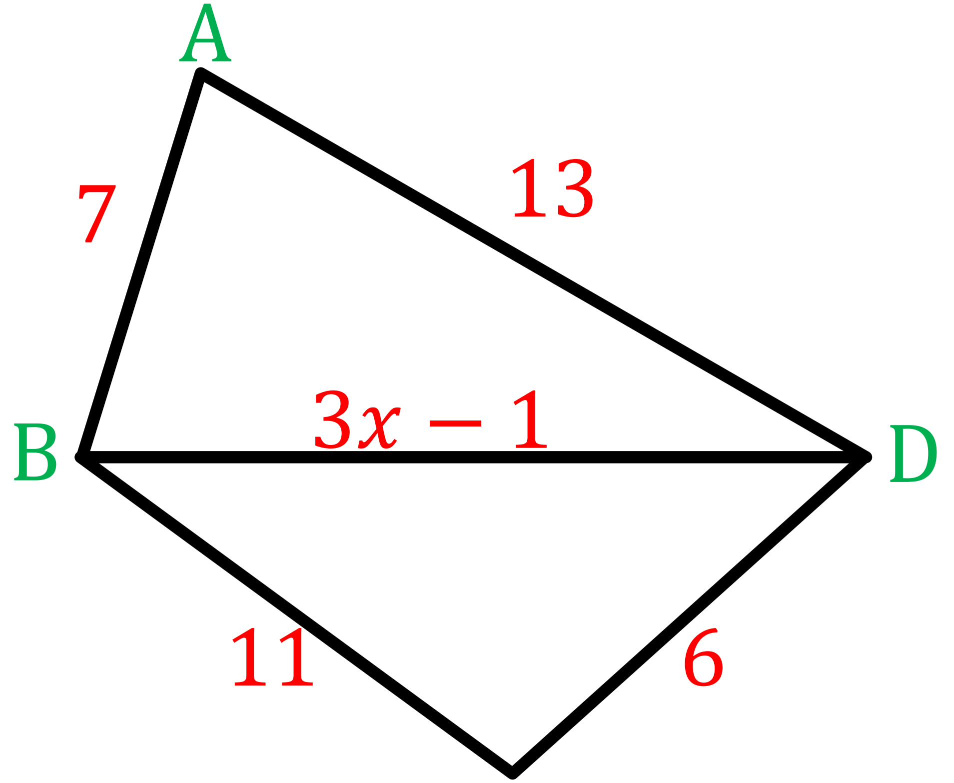
$$\xRightarrow{+1} 7 < 3x < 21 \xRightarrow{\div 3} \boxed{\frac{7}{3} < x < 7}$$

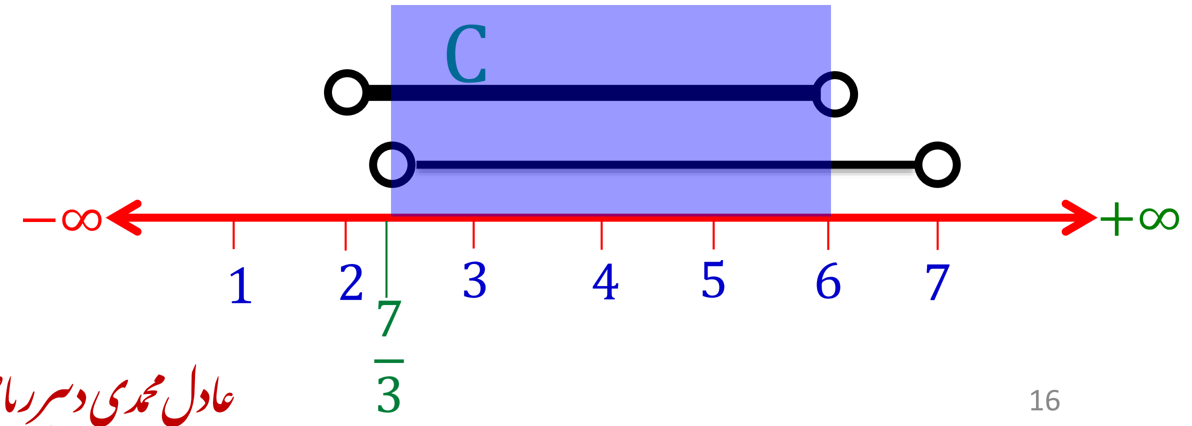
$$\Delta BCD : |11-6| < 3x-1 < 11+6$$

$$\Rightarrow 5 < 3x-1 < 17$$

$$\xRightarrow{+1} 6 < 3x < 18 \xRightarrow{\div 3} \boxed{2 < x < 6}$$

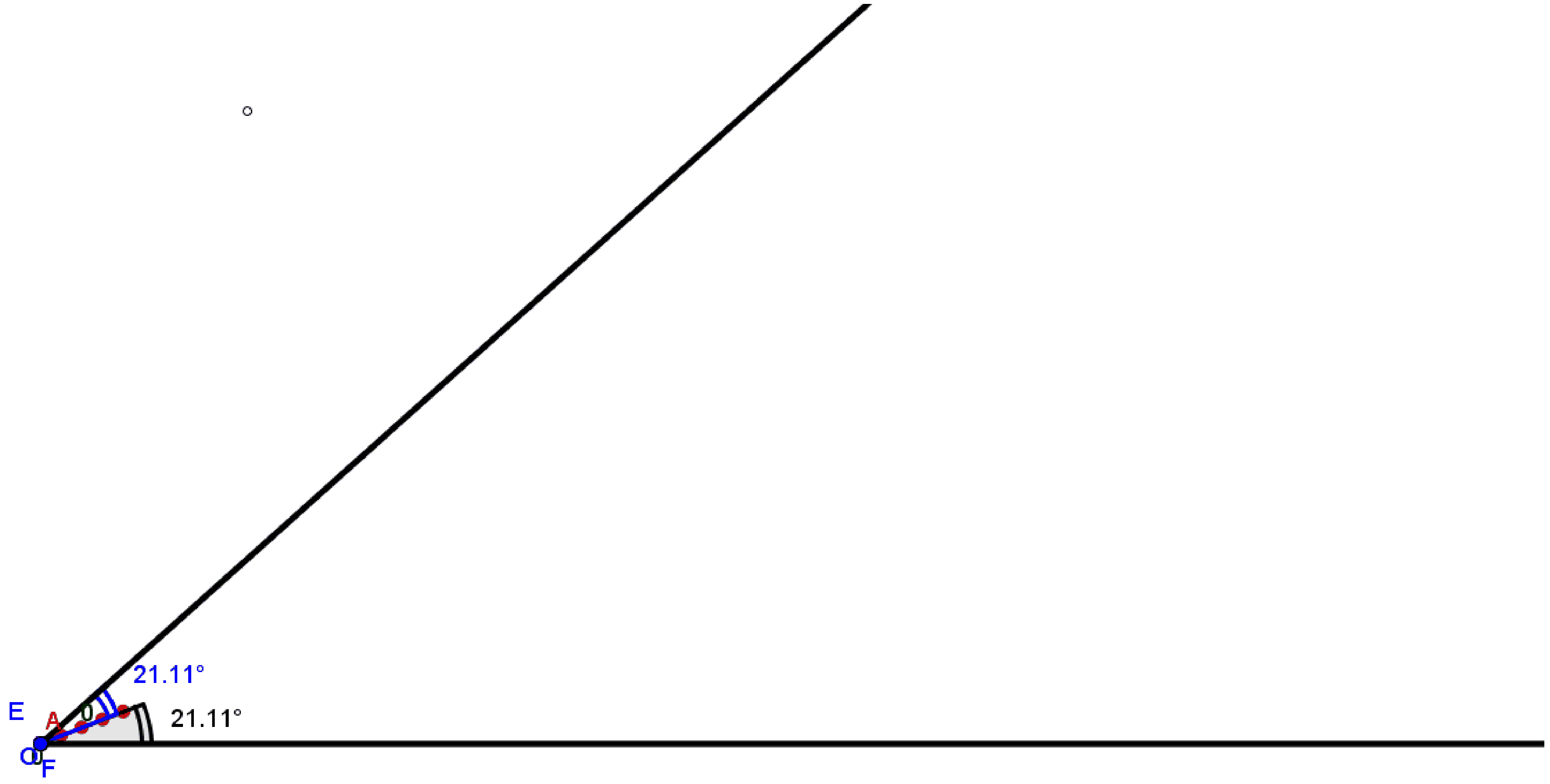
$$\Rightarrow \frac{7}{3} < x < 6 \xRightarrow{x\in\mathbb{Z}} \boxed{\min(x) = 3}$$





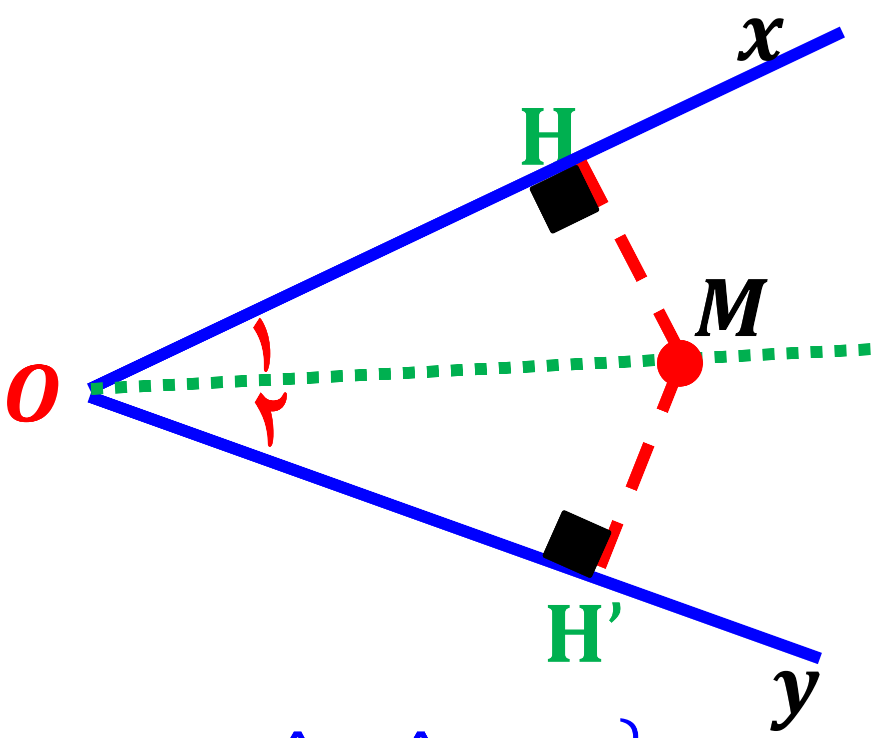
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

یادآوری : نیمساز یک زاویه نیم خطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند



الف : فرض می کنیم نقطه M روی نیمساز زاویه ی xOy قرار دارد و نشان می دهیم که فاصله M از دو ضلع زاویه یکسان است .

عمودها MH و 'MH را بر اضلاع زاویه وارد می کنیم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ OM=OM\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OHM \cong \triangle OH'M \rightarrow MH=MH'$$

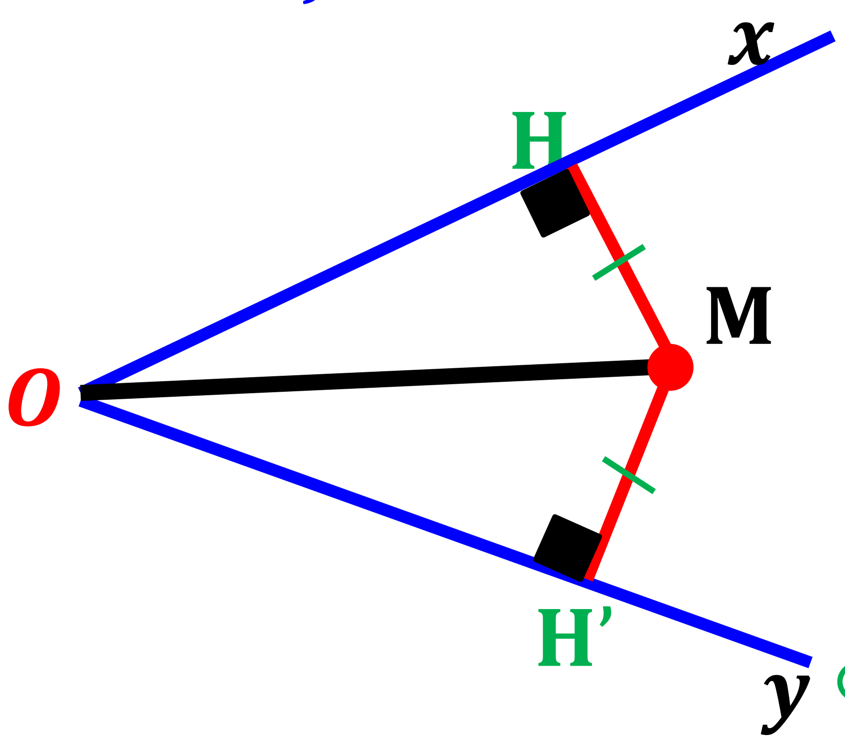
نتیجه : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

به عکس فرض می کنیم که M نقطه ای درون زاویه xOy باشد که فاصله آن از دو ضلع زاویه یکسان است . و نشان می دهیم نقطه M روی نیمساز زاویه ی xOy قرار دارد :

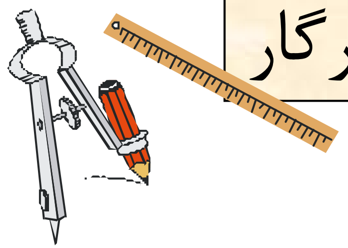
پاره خط OM را رسم می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ\\ MH=MH'\\ OM=OM\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}\triangle OHM\cong\triangle OH'M\rightarrow\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

پس OM نیمساز زاویه xOy است.



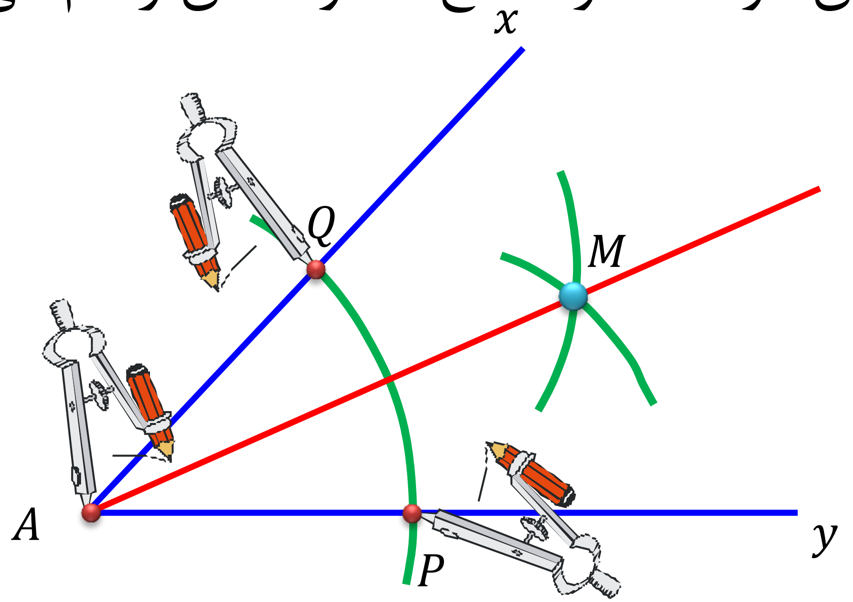
نتیجه : هر نقطه در صفحه که از دو ضلع یک زاویه از آن صفحه به یک فاصله است روی نیمساز آن زاویه قرار دارد

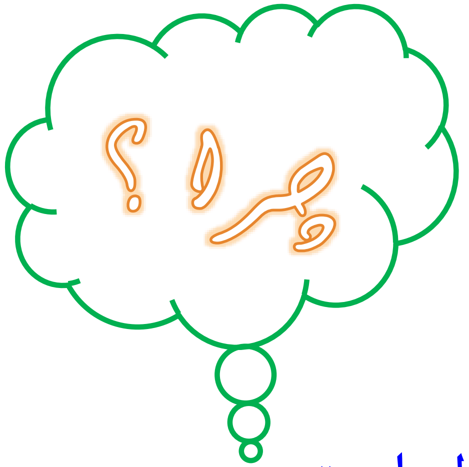


مراحل رسم نیمساز یک زاویه به کمک خطکش و پرگار

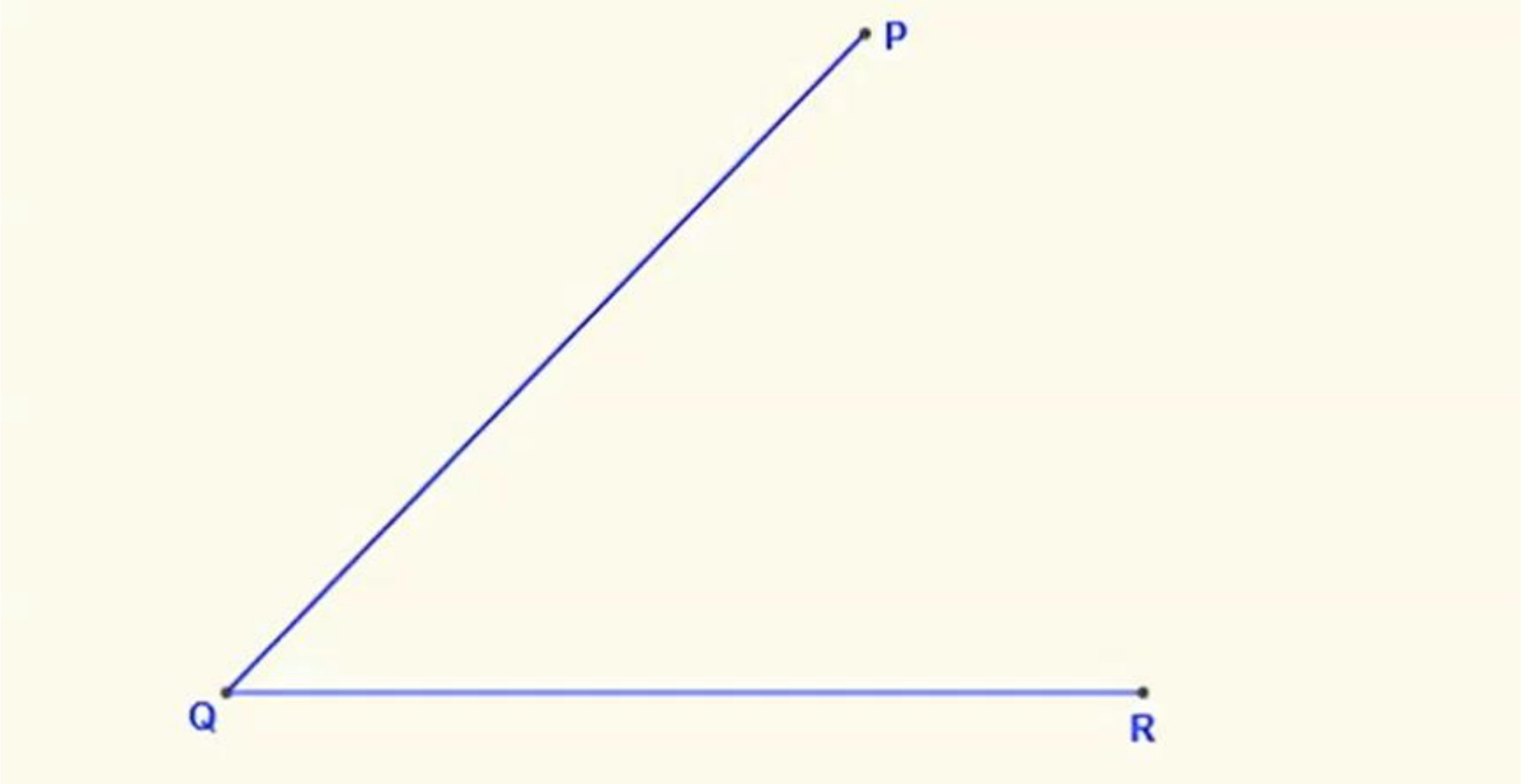
۱. به مرکز A و شعاع دلخواه r کمانی رسم نموده تا اضلاع زاویه را در دو نقطه قطع کند.

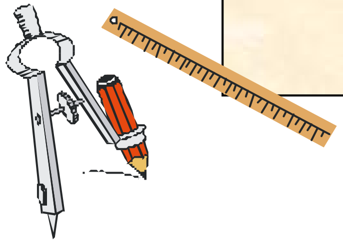
۲. به مرکزهای آن دو نقطه و شعاع r دو کمان رسم می کنیم تا همدیگر را در نقطه M قطع کنند.





۳. نیم خط AM را رسم می کنیم . نیم خط AM پاسخ مساله است.

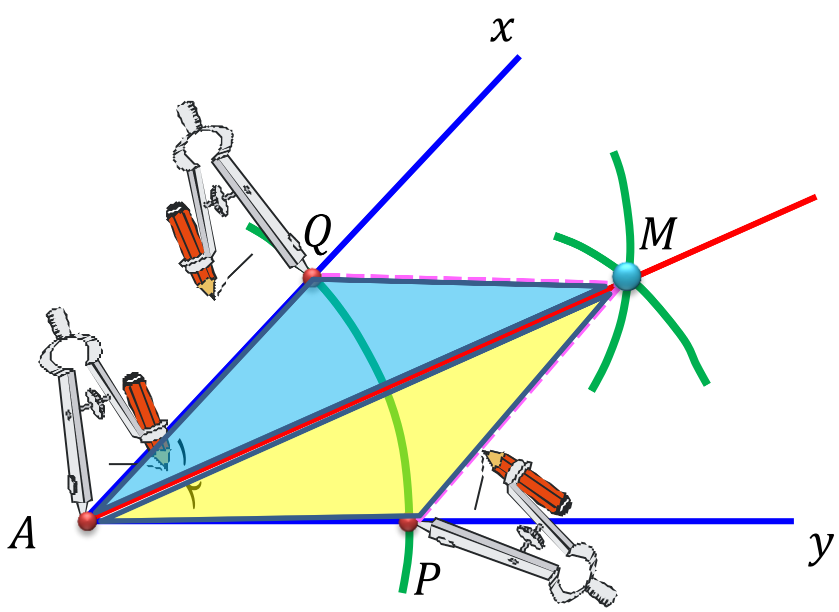

P
Q
R



استدلال

پاره خطهای QM ,PM را رسم می کنیم .

در دو مثلث ΔAQM ,ΔAPM داریم :



$$\left.\begin{array}{c} AP = AQ = r \\ MP = MQ = r \\ AM = AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \Delta APM \cong \Delta AQM \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

سوال : به کمک خطکش و پرگار یک زاویه ی ۳۰ درجه رسم کنید .

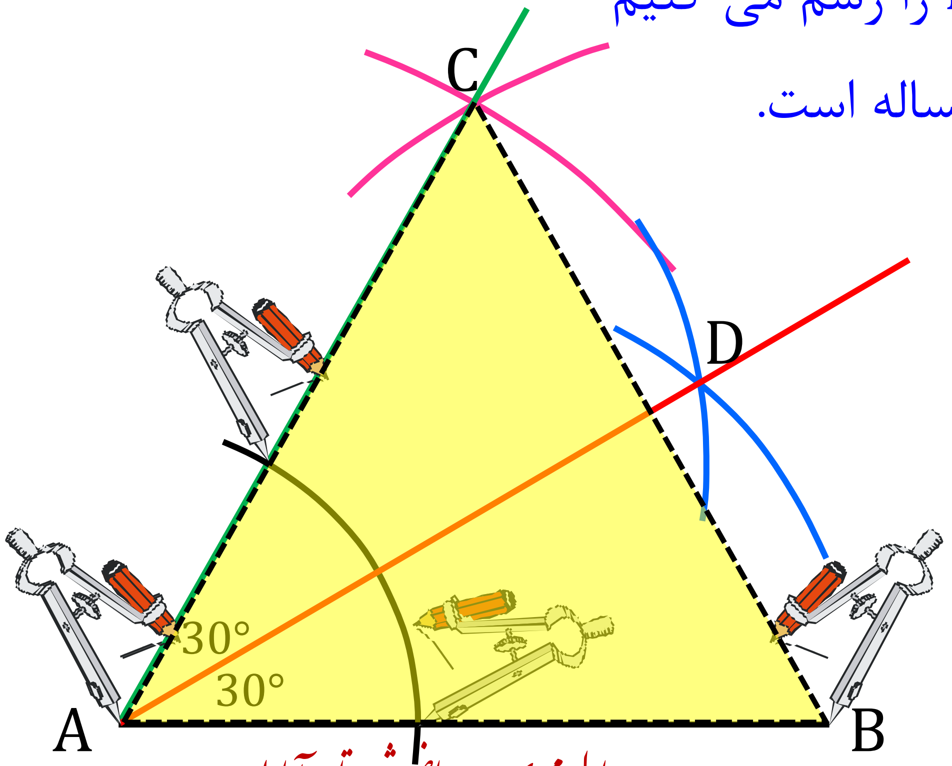
۱. پاره خط AB را رسم می کنیم.

۲. به مرکزهای A و B و شعاع AB دو کمان رسم نموده تا همدیگر را در نقطه ی C قطع کنند .

۳. پاره خط AC را رسم می کنیم . زاویه ی BAC مساوی ۶۰ درجه است . چرا ؟

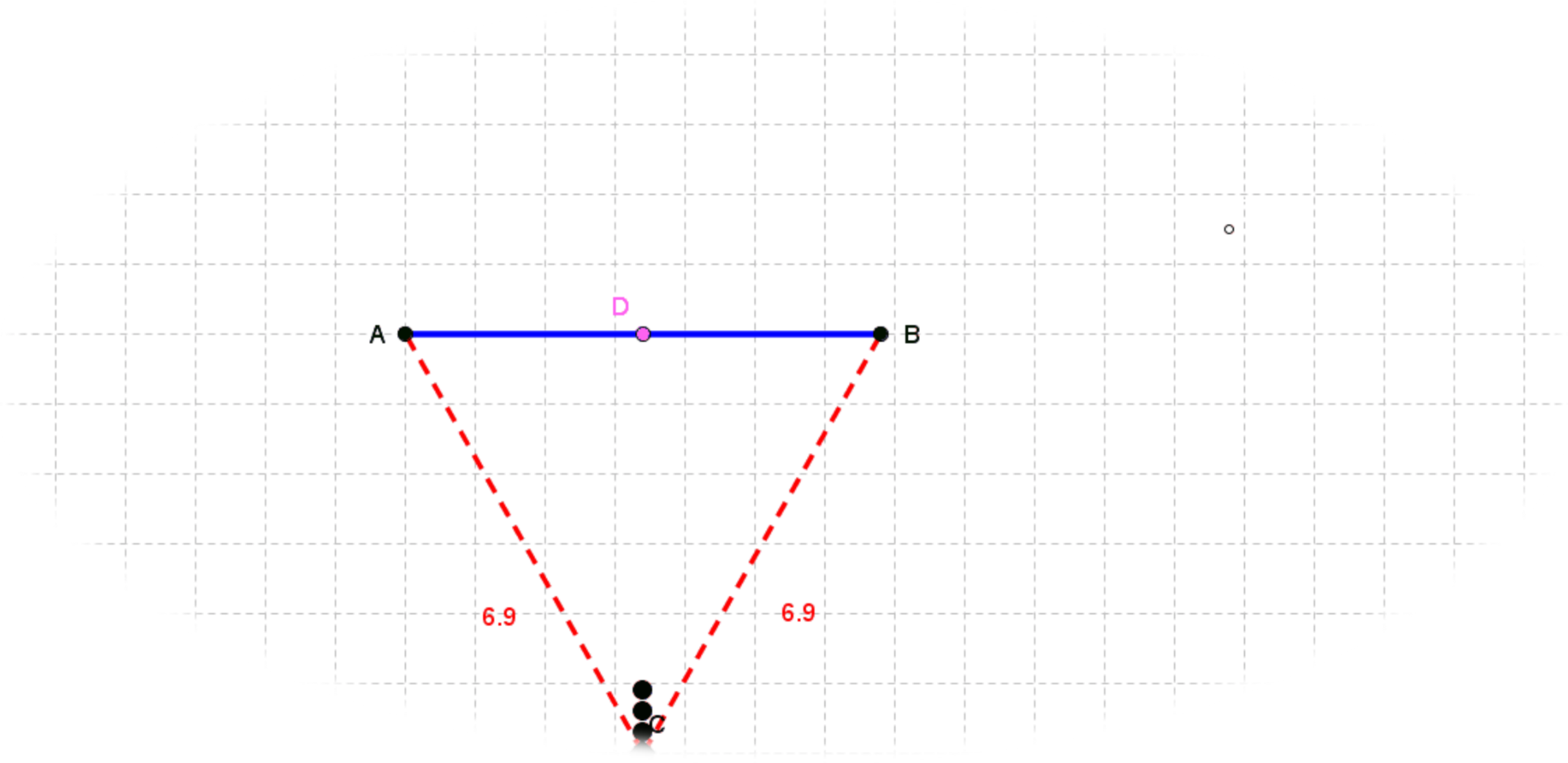
۴. نیمساز زاویه BAC را رسم می کنیم

۵. زاویه BAD پاسخ مساله است.

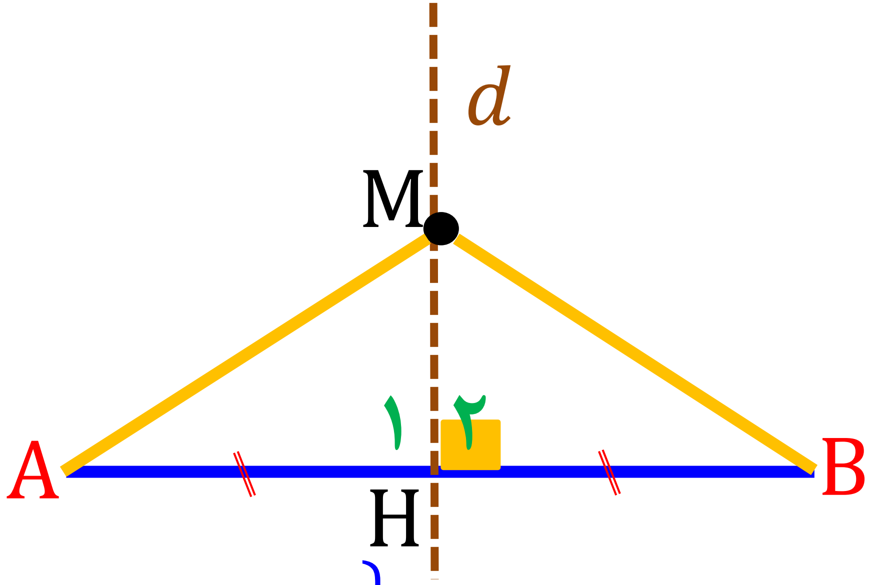


عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

یادآوری : عمود منصف یک پاره خط ، خطی است که بر آن پاره خط عمود است و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند



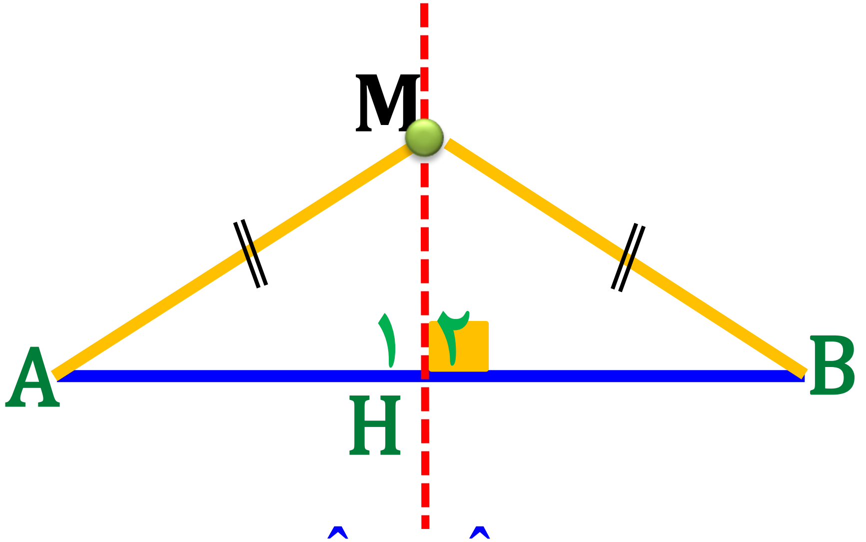
فرض کنیم d عمود منصف پاره خط AB و نقطه M بر خط d واقع باشد. باید ثابت کنیم که AM=BM .



$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \rightarrow AM = BM$$

نتیجه : هرنقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است .

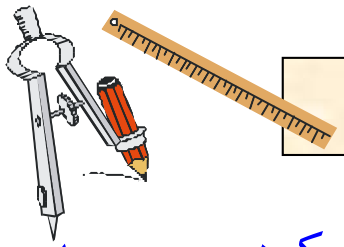
فرض کنیم نقطه M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است یعنی AM=BM .
نقطه M را به وسط پاره خط AB یعنی نقطه H وصل می کنیم :



$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ AM = BM \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \rightarrow \hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲} = ۹۰^\circ$$

پس MH عمود منصف پاره خط AB است لذا M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

نتیجه : هرنقطه از صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

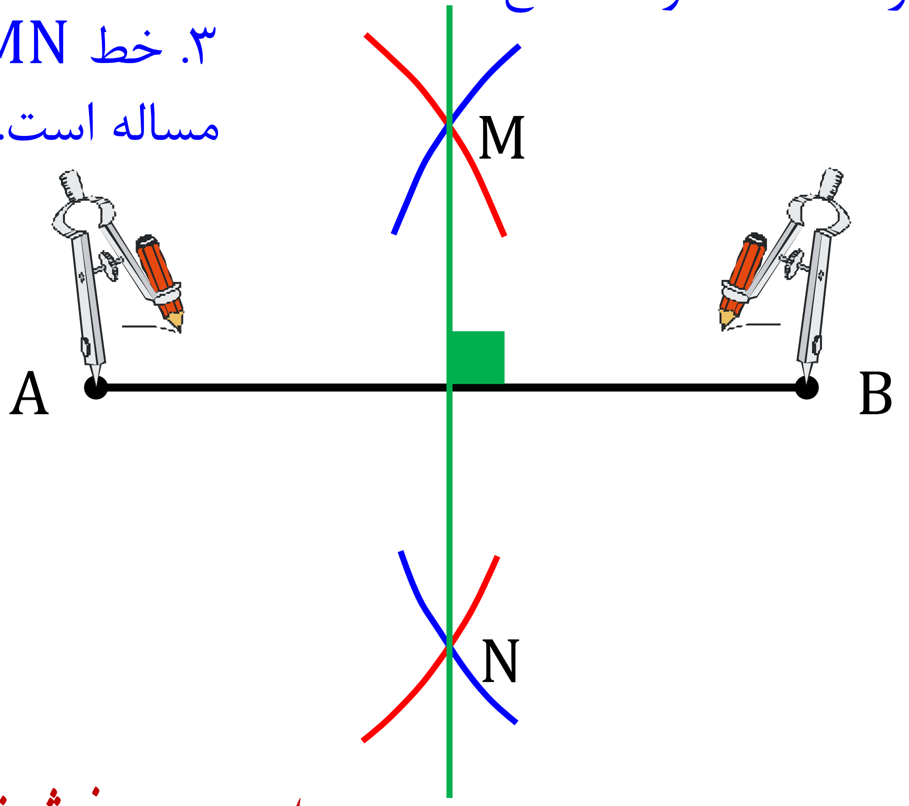


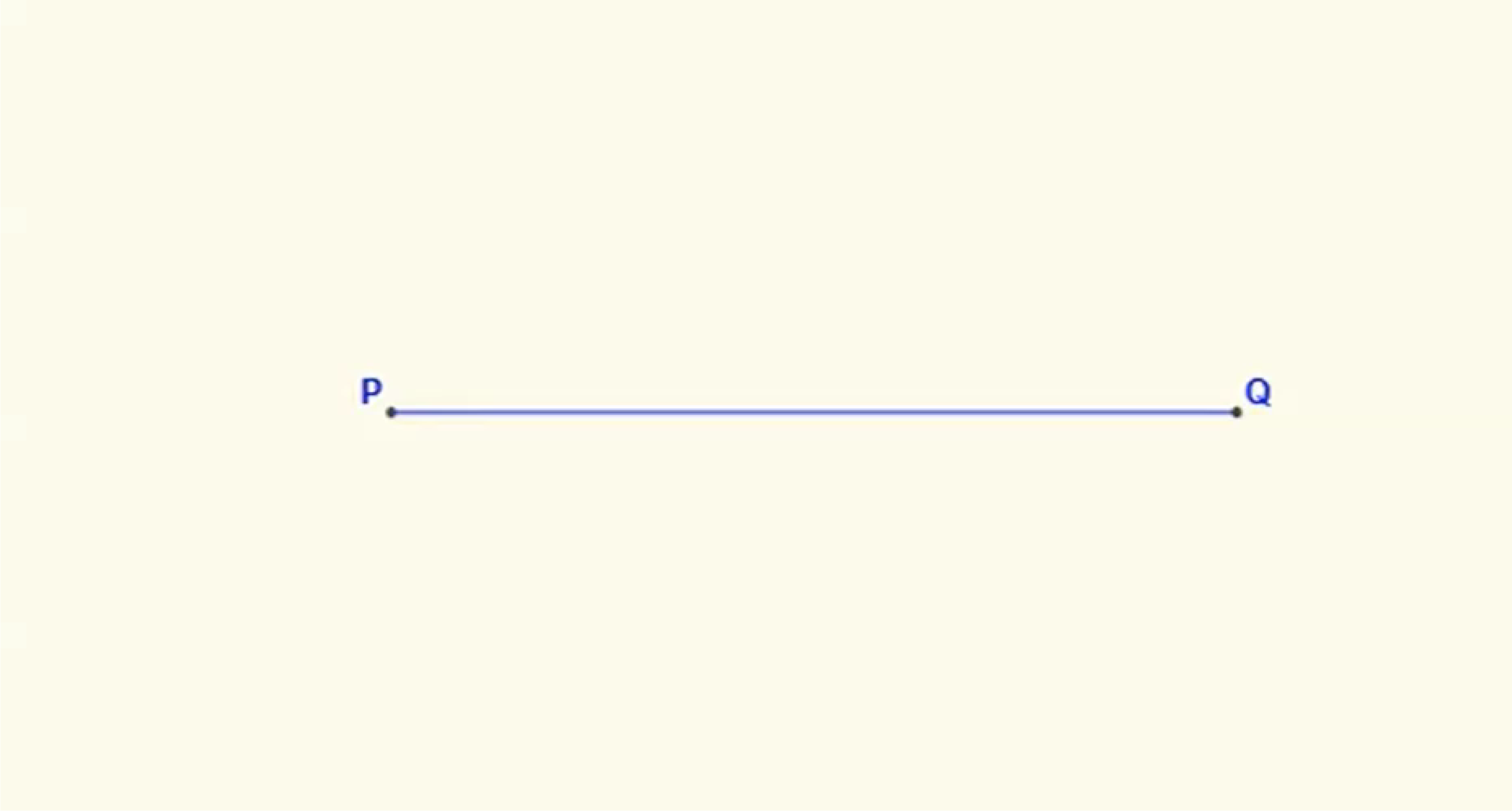
مراحل رسم عمود منصف پاره خط AB

۱. دهانه پرگار را به اندازه ی r (r باید از نصف AB بیشتر باشد . چرا ؟) باز کرده سپس به مرکز A کمانی رسم می کنیم

۲. به مرکز B و همان شعاع قبلی (یعنی r) کمان دیگری رسم نموده تا دو کمان همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند

۳. خط MN را رسم می کنیم. خط MN پاسخ مساله است.

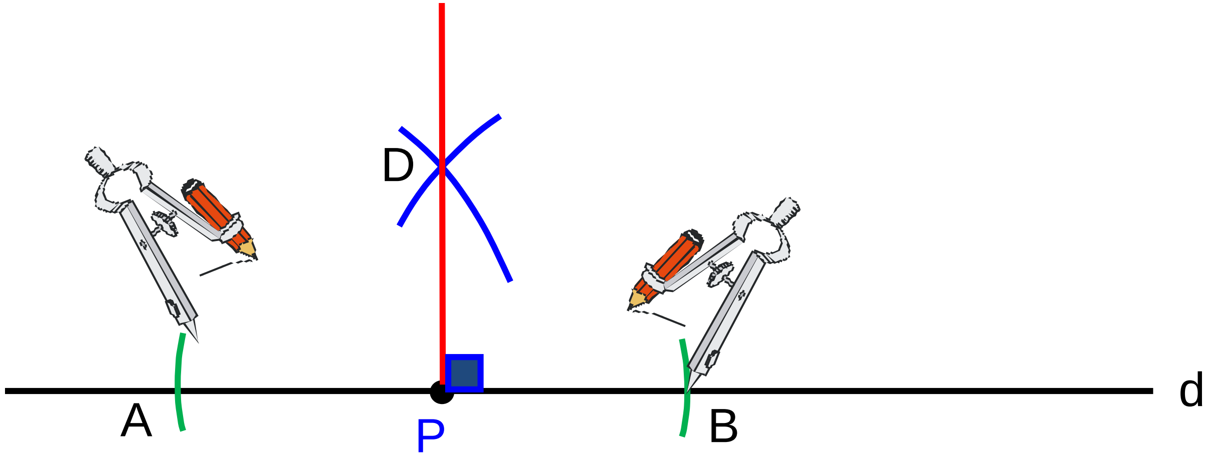



P
Q

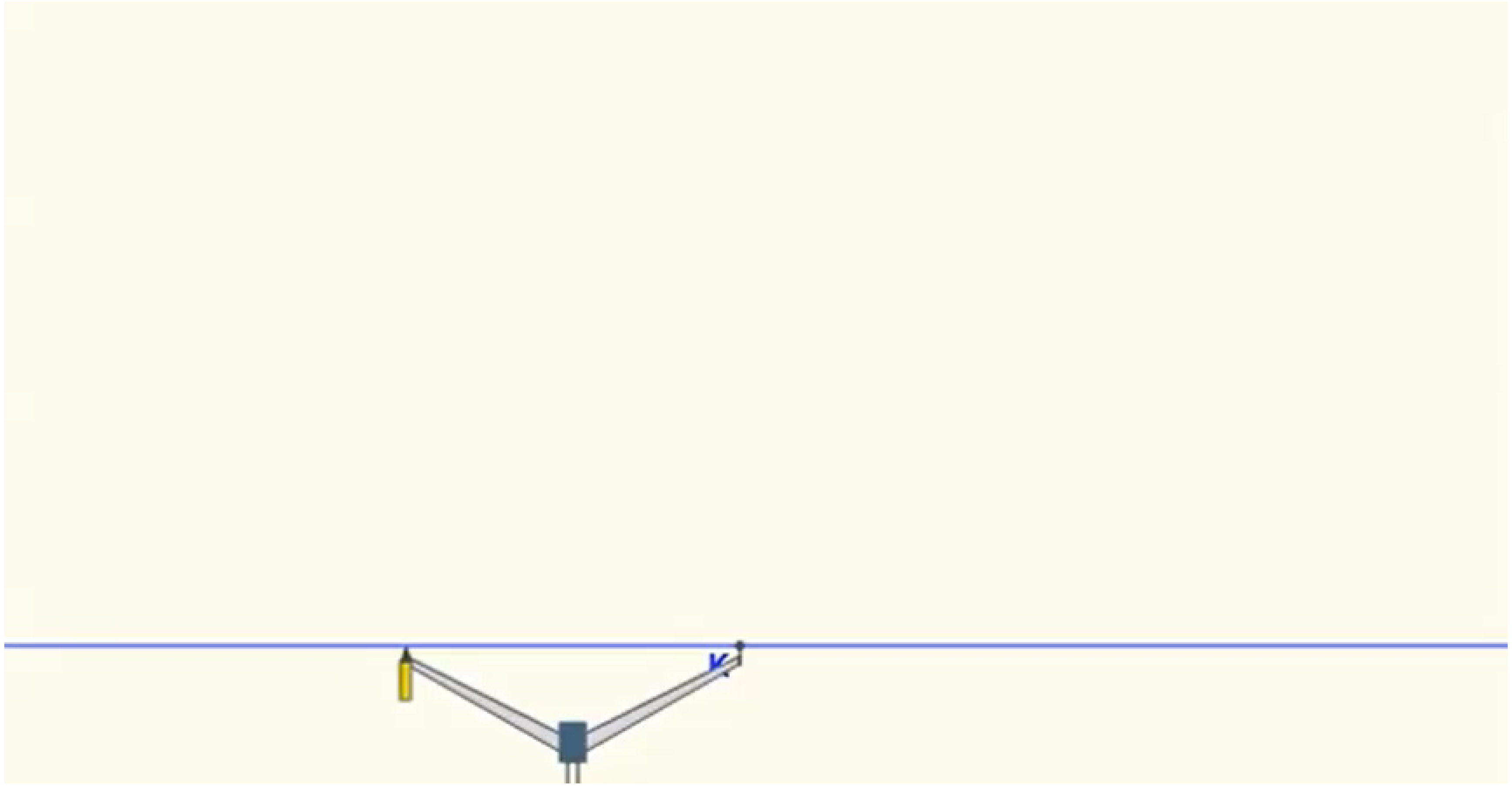
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای واقع بر آن

۱. به مرکز نقطه p واقع بر خط d کمانی رسم نموده تا خط d را در A و B قطع کند

۲. عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.



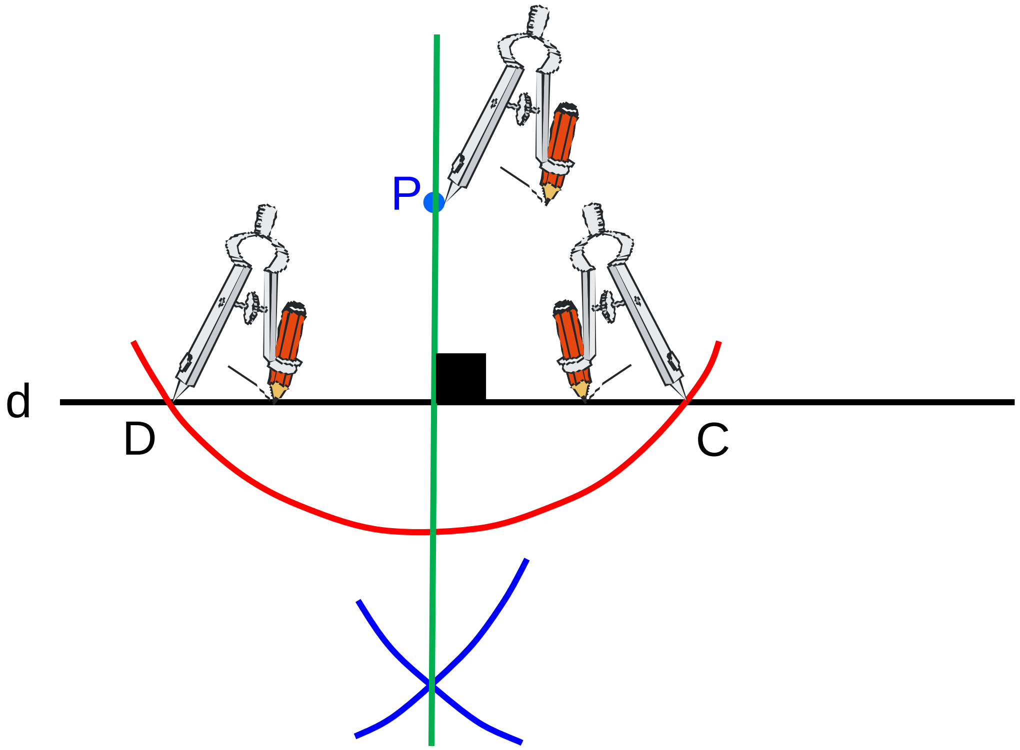
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان



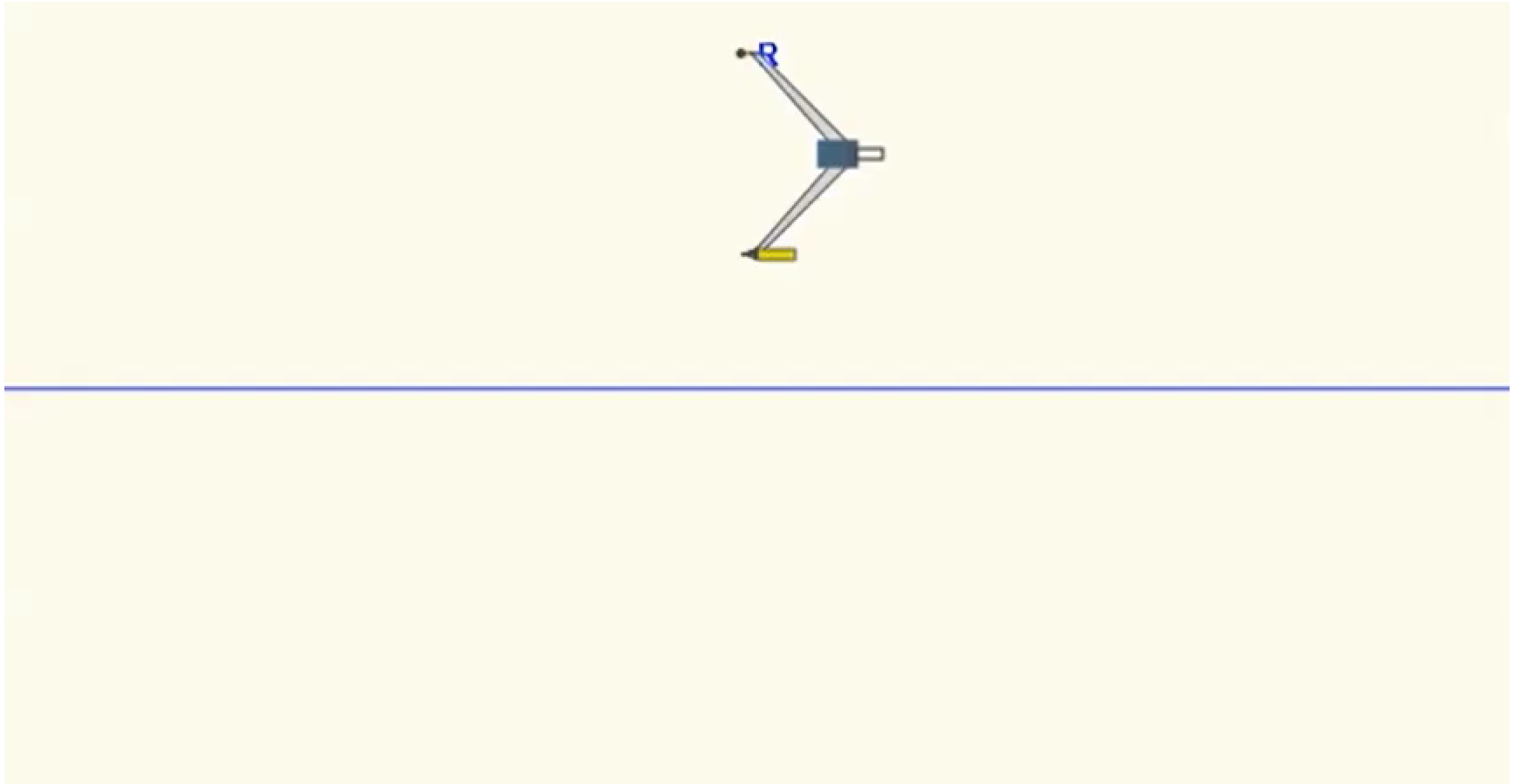
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن

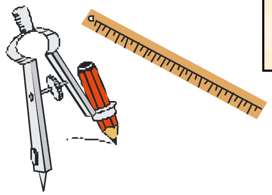
۱. به مرکز نقطه p غیر واقع بر خط d کمانی رسم نموده تا خط d را در C و D قطع کند

۲. عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.



عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان


R



رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن

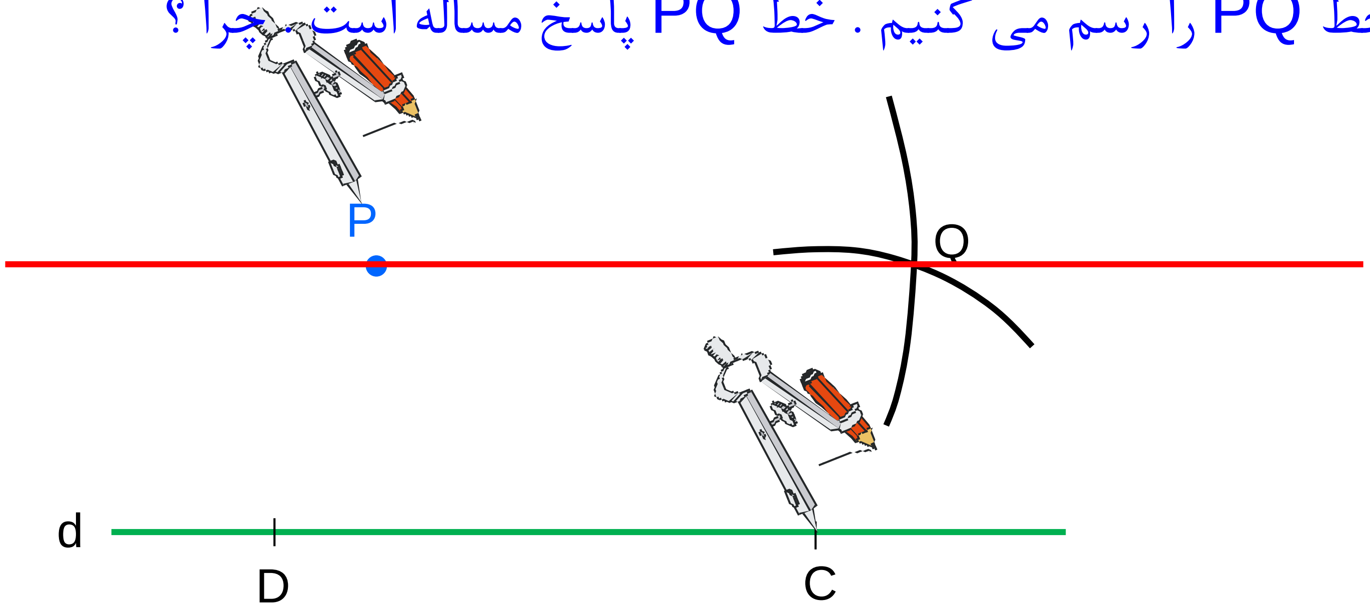
فرض کنیم نقطه p بر خط d قرار نداشته باشد

۱. دو نقطه دلخواه و متمایز C و D را روی خط d انتخاب می کنیم

۲. به مرکز P و شعاع CD کمانی رسم می کنیم

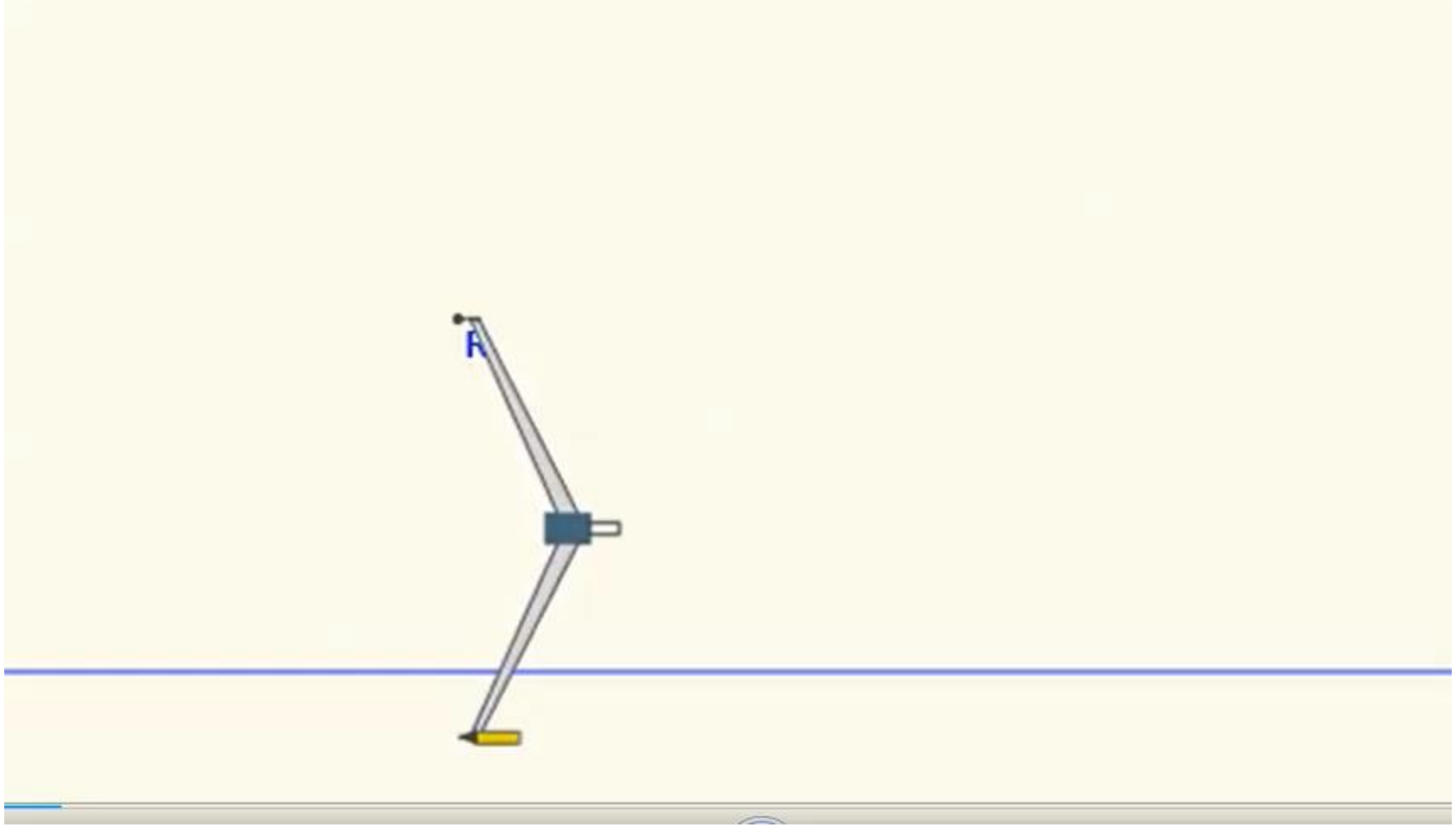
۳. به مرکز C و شعاع PD کمان دیگری رسم نموده تا کمان قبلی را در نقطه Q قطع کند.

۴. خط PQ را رسم می کنیم . خط PQ پاسخ مساله است . چرا ؟

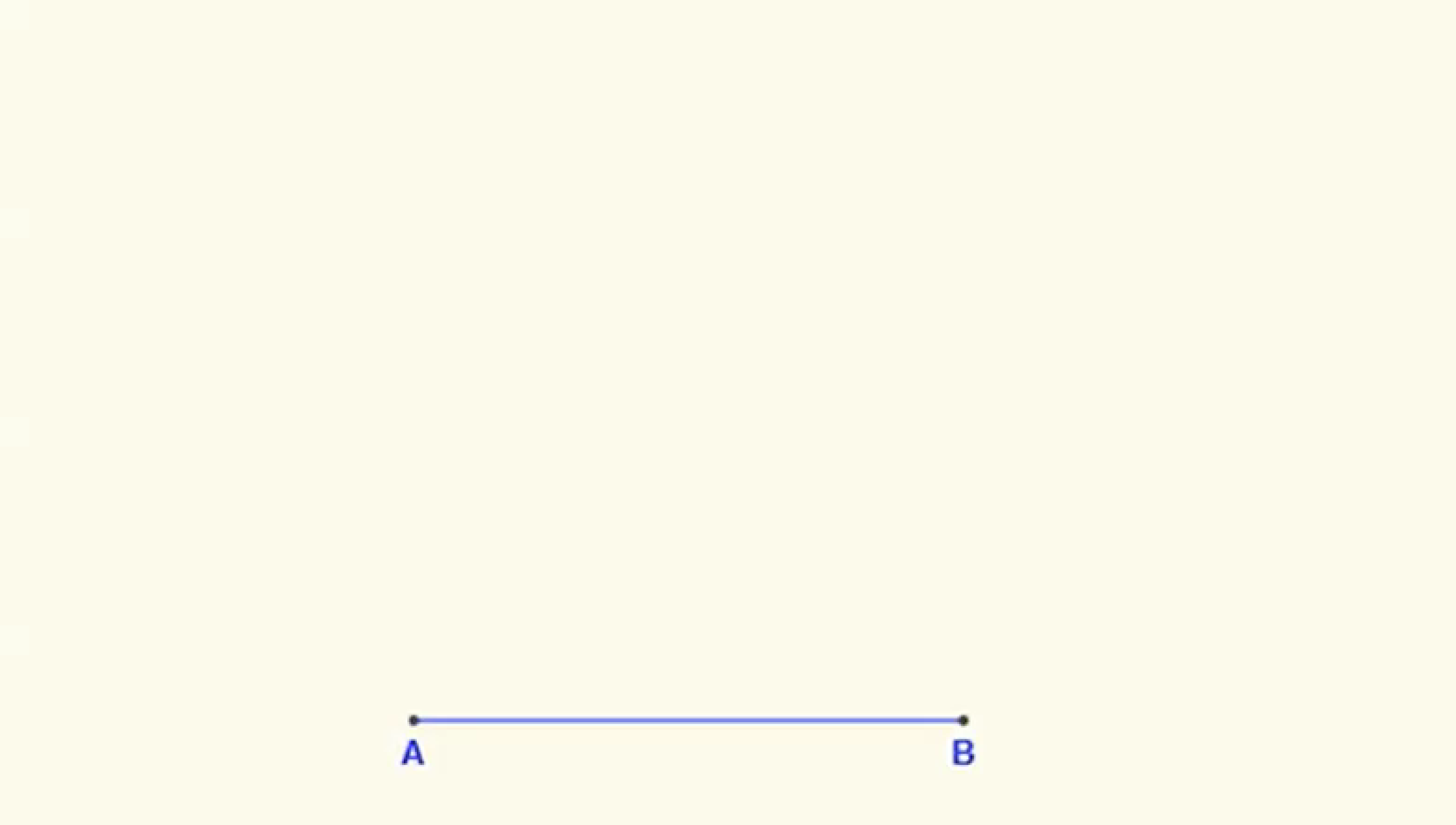


عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن روش دوم

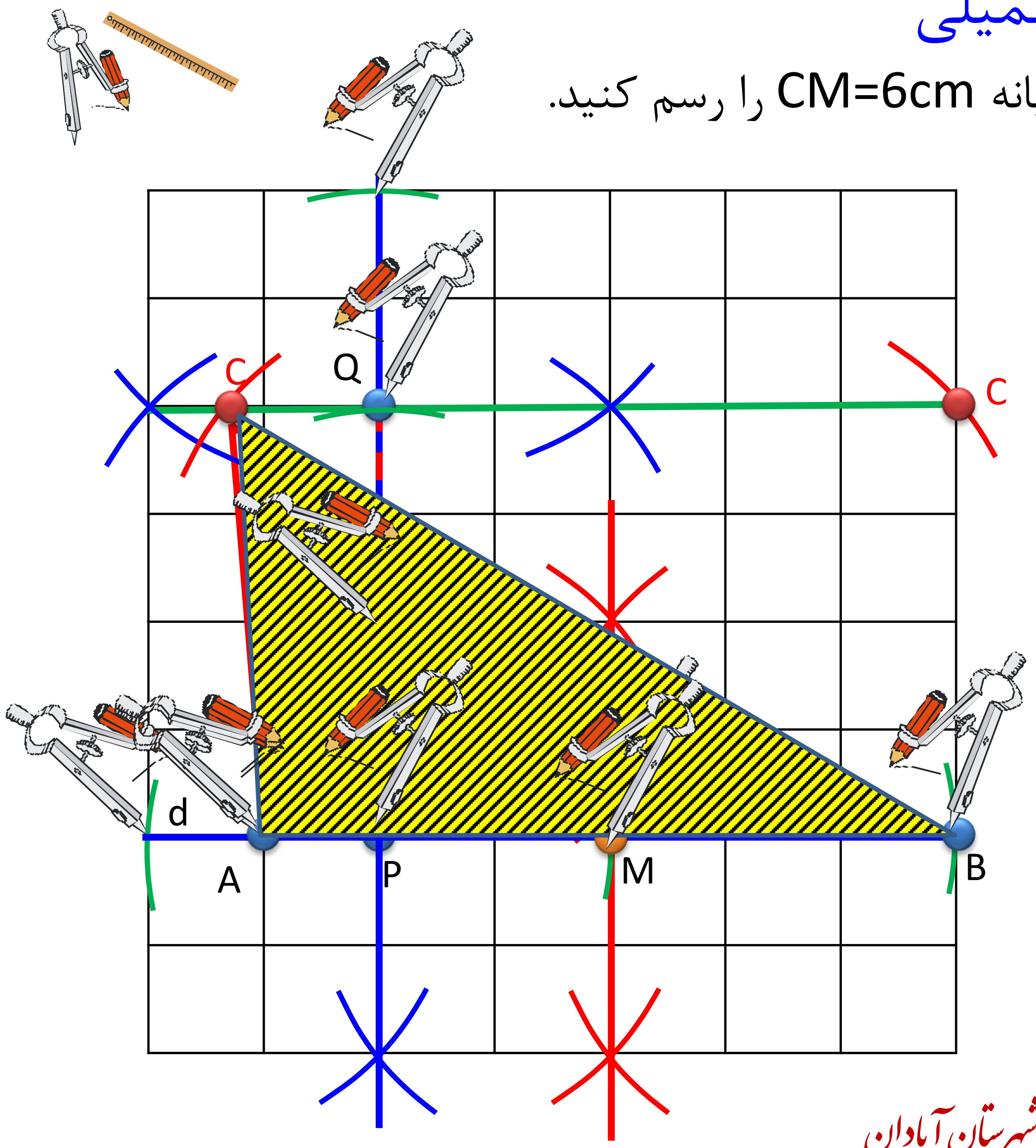


رسم مربع با داشتن یک ضلع



سوالات تکمیلی

۱. مثلث ABC با معلومات AB=6 cm و ارتفاع CH=4cm و میانه CM=6cm را رسم کنید.



پاسخ :

۱. نقطه دلخواه P را روی خط d اختیار نموده سپس عمود PQ به طول ۴ سانتی متر را از آن خارج می کنیم

۲. از نقطه Q خط $\acute{d}$ عمود بر خط PQ و موازی با خط d رسم می کنیم

۳. نقطه دلخواه A را روی خط d اختیار نموده سپس پاره خط AB به طول ۶ سانتی متر را از خط d جدا می کنیم .

۴. وسط پاره خط AB را تعیین نموده و آنرا M می نامیم

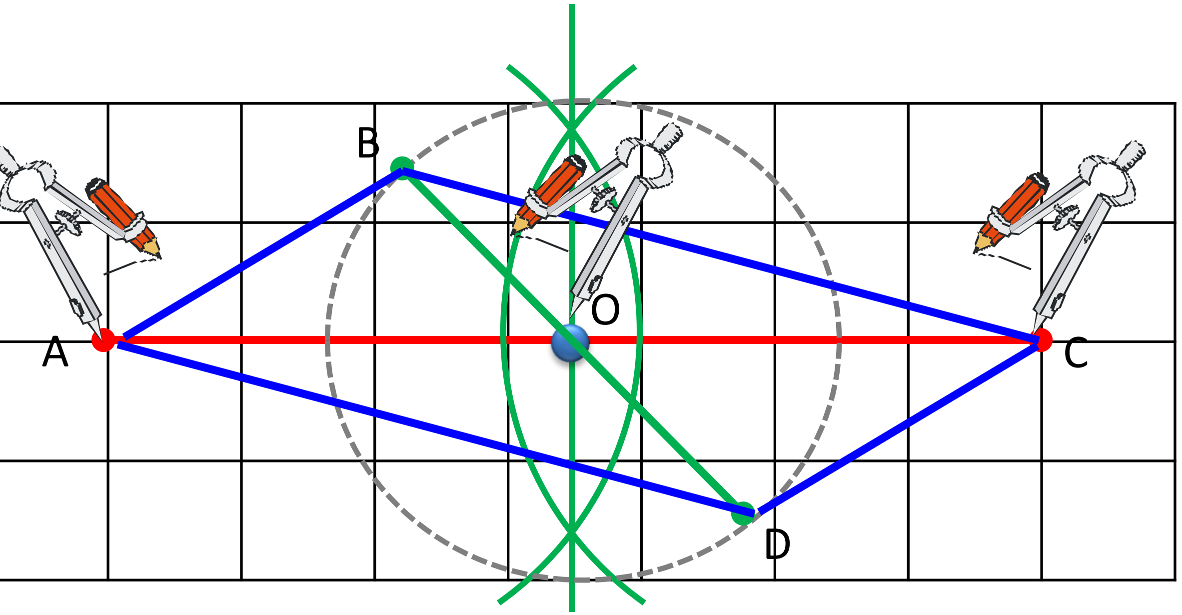
۵. به مرکز M و شعاع ۶ کمانی رسم نموده تا $\acute{d}$ را در نقطه C قطع کند

۶. C را به A وB وصل می کنیم مثلث ABC پاسخ مساله است.

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۱ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟



۱. پاره خط AC به طول ۷ سانتی متر را رسم می کنیم

۲. وسط پاره خط ACرا پیدا کرده و آنرا O می نامیم

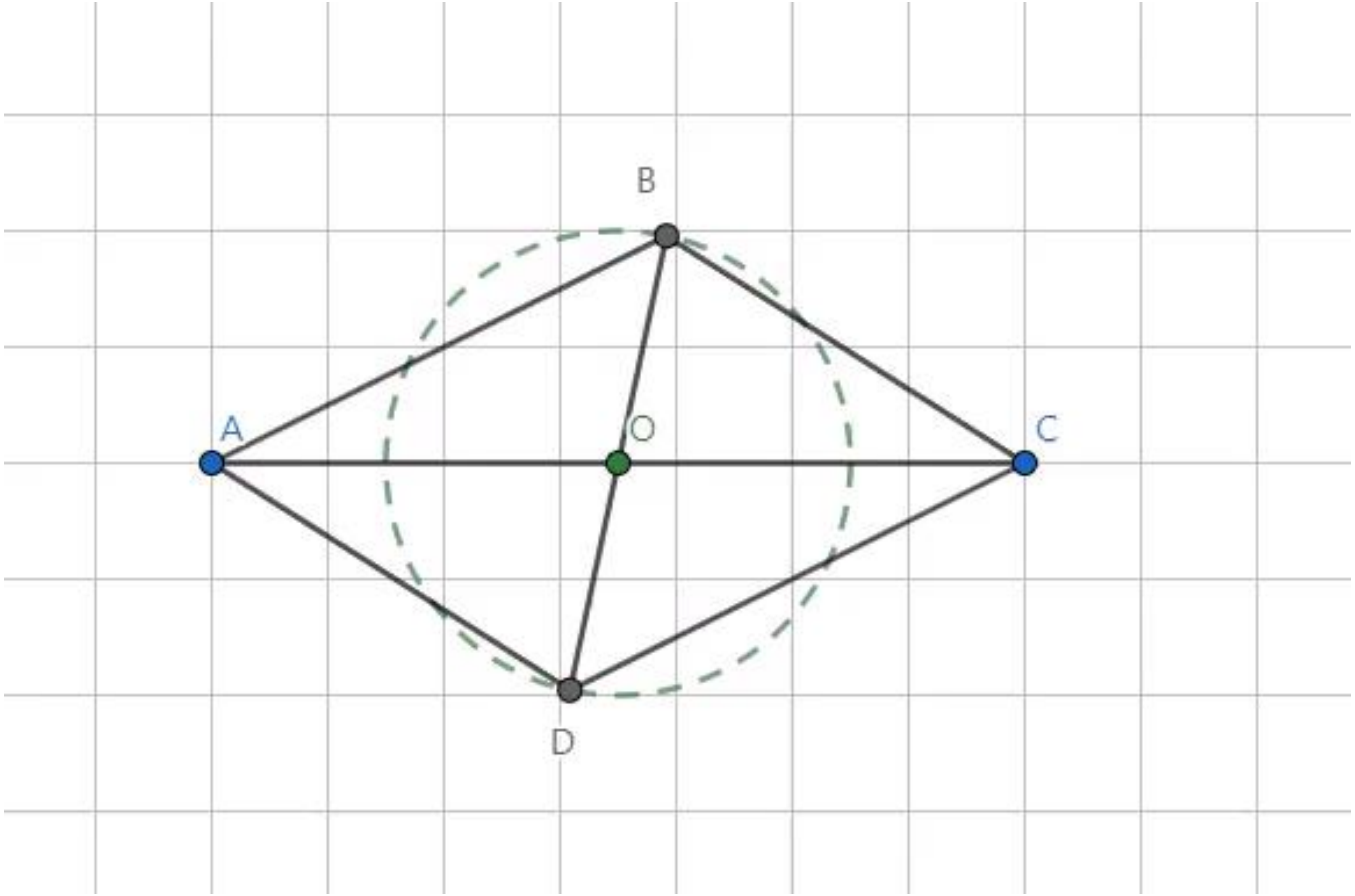
۳. به مرکز O و شعاع ۲ سانتی متر دایره ای رسم می کنیم.

۴. قطر دلخواه BD را رسم می کنیم.

۵. چهار ضلعی ABCD را رسم می کنیم.

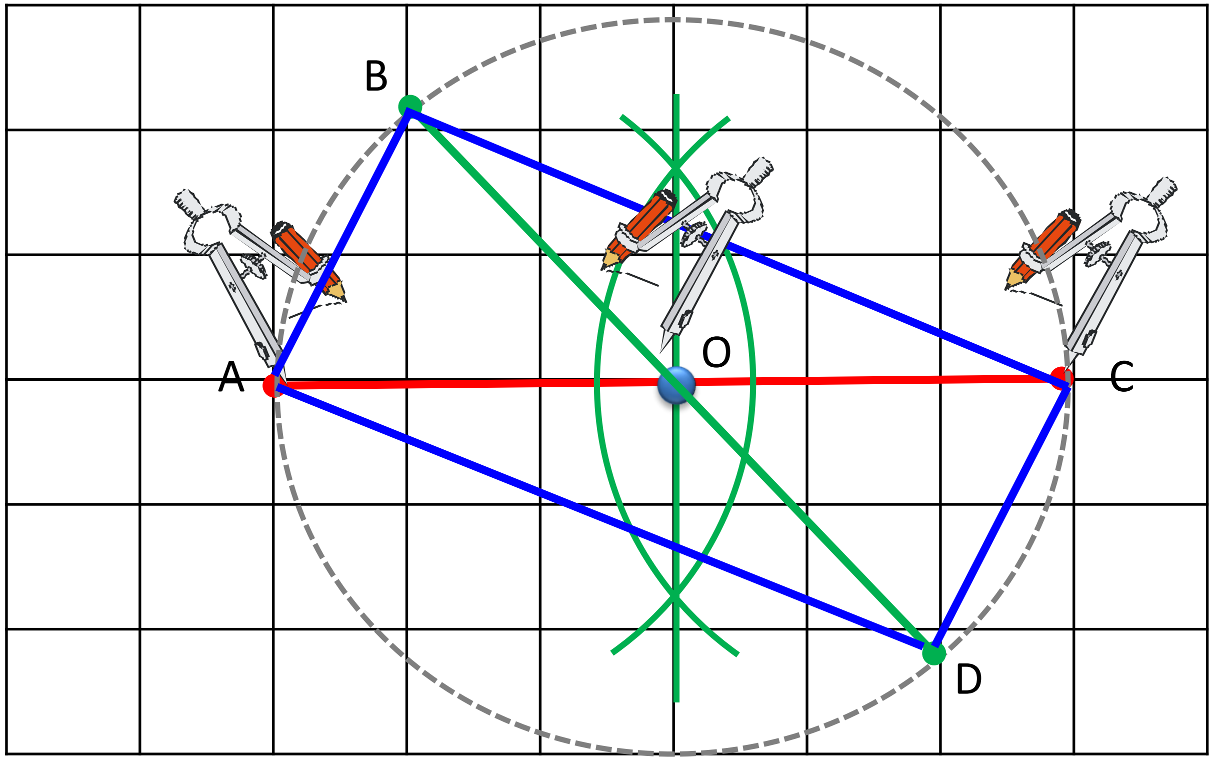
ب : بی شمار – زیرا قطر BD یک قطر دلخواه از دایره است و دایره بی شمار قطر دارد

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان


B
A
O
C
D

تمرین

۲ــ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.



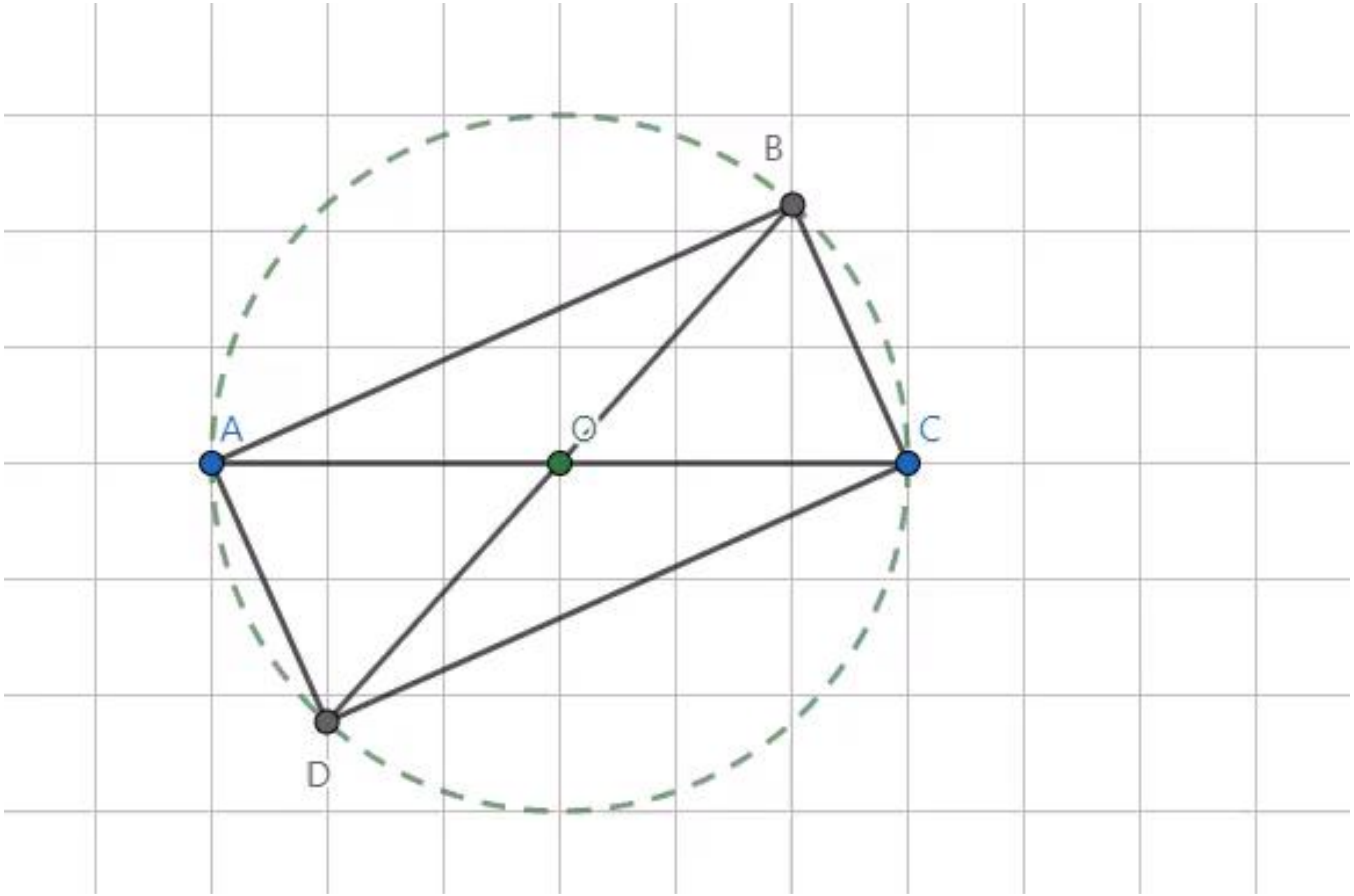
۱. پاره خط AC به طول ۶ سانتی متر را رسم می کنیم

۲. وسط پاره خط ACرا پیدا کرده و آنرا O می نامیم

۳. به مرکز O و شعاع ۳ سانتی متر دایره ای رسم می کنیم.

۴. قطر دلخواه BD را رسم می کنیم.

۵. چهار ضلعی ABCD را رسم می کنیم.

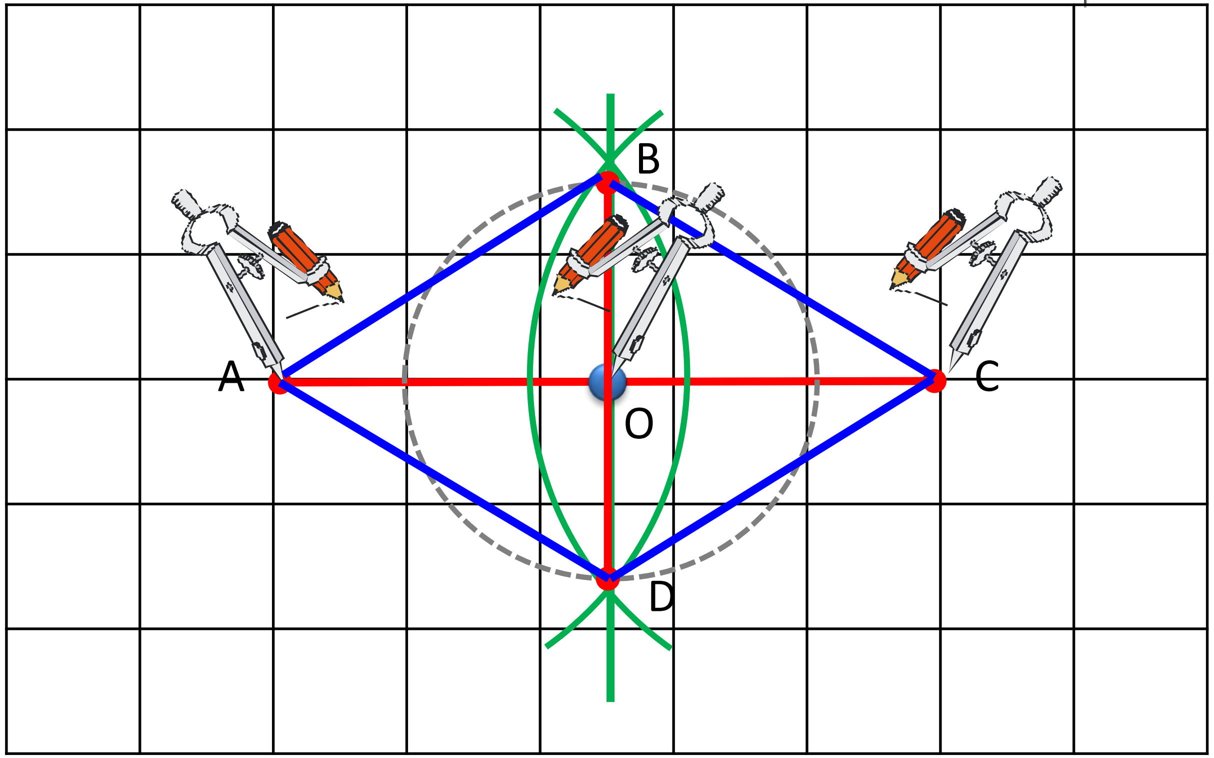

B
A
O
C
D

تمرین

۳ـ فرض کنیم که برای لوزی‌بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای ان چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.



الف :

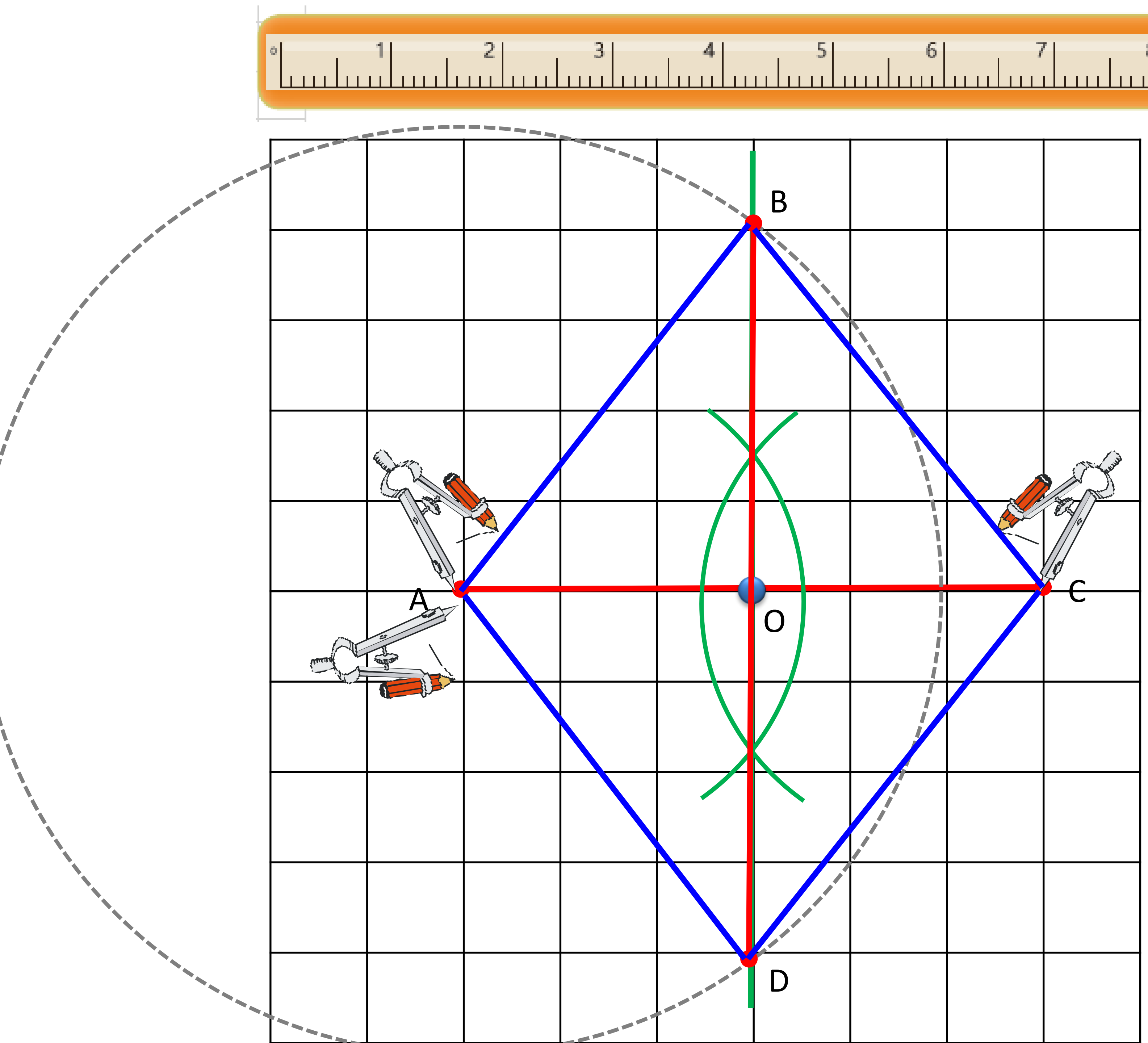
۱. پاره خط AC به طول ۵ سانتی متر را رسم می کنیم

۲. عمود منصف پاره خط ACرا رسم کرده تا ACرا در O قطع کند

۳. به مرکز O و شعاع ۱/۵ سانتی متر دایره ای رسم می کنیم. تا عمود منصف را در نقاط Bو D قطع کند

۴. چهار ضلعی ABCD را رسم می کنیم.

تمرین



ب :

۱. پاره خط AC به طول ۶ سانتی متر را رسم می کنیم

۲. عمود منصف پاره خط ACرا رسم می کنیم

۳. به مرکز A و شعاع ۵ سانتی متر دایره ای رسم می کنیم. تا عمود منصف را در نقاط Bو D قطع کند

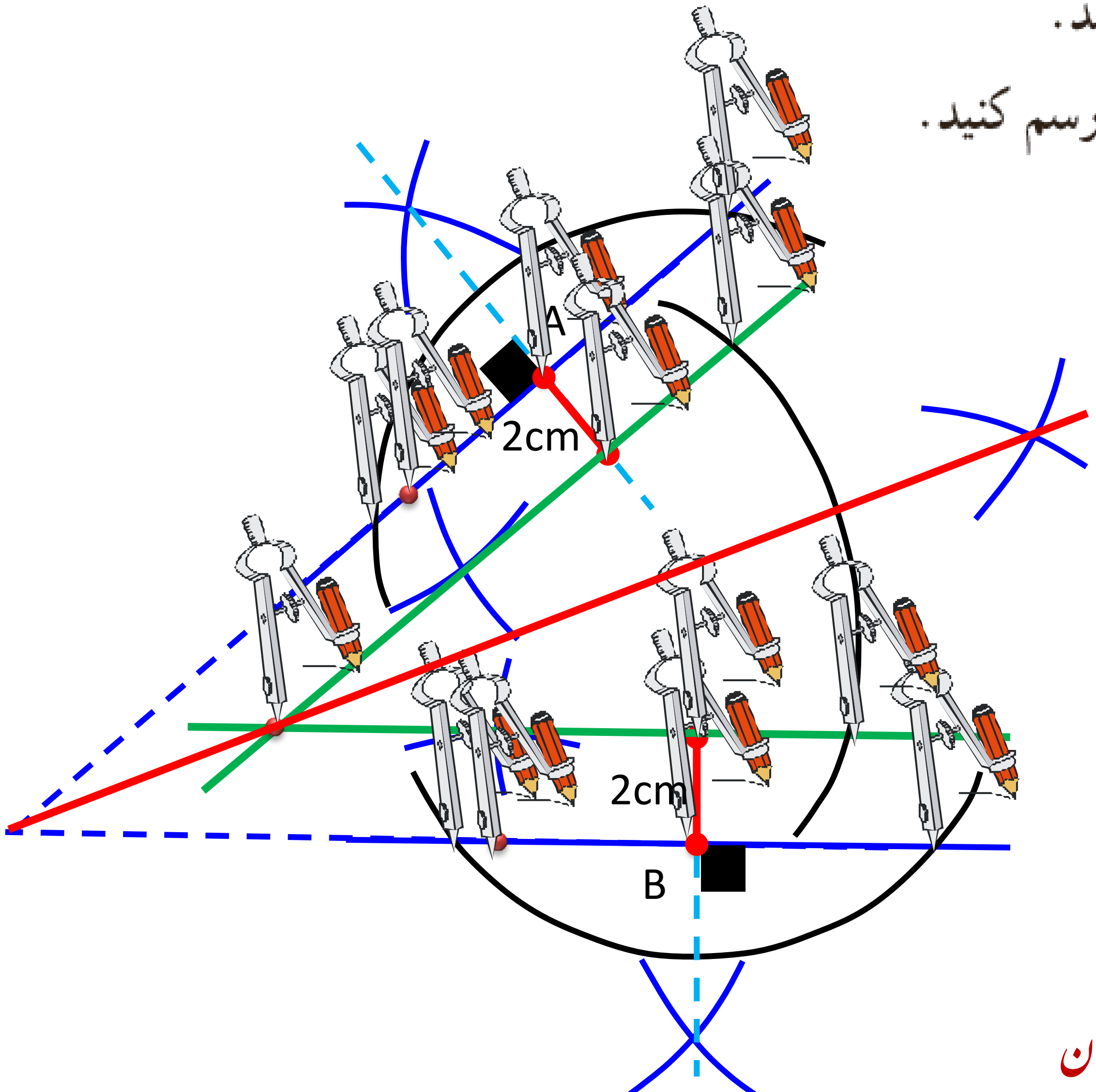
۴. چهار ضلعی ABCD را رسم می کنیم.

تمرین

۴ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.



الف :

۱. دو نقطه دلخواه A و B را روی اضلاع زاویه اختیار می کنیم

۲. ازدو نقطه A و B عمودهایی به طولهای ۲ واحد به سمت داخل زاویه بر اضلاع وارد می کنیم

۳. دو خط به موازات اضلاع زاویه و به فاصله ۲ واحد از آنها رسم می کنیم تا همدیگر را در نقطه خواسته شده قطع کنند.

ب: نیمساز زاویه جدید را رسم می کنیم

تمرین

۵ــ به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجهٔ آن در قسمت (ب) استفاده کنید.

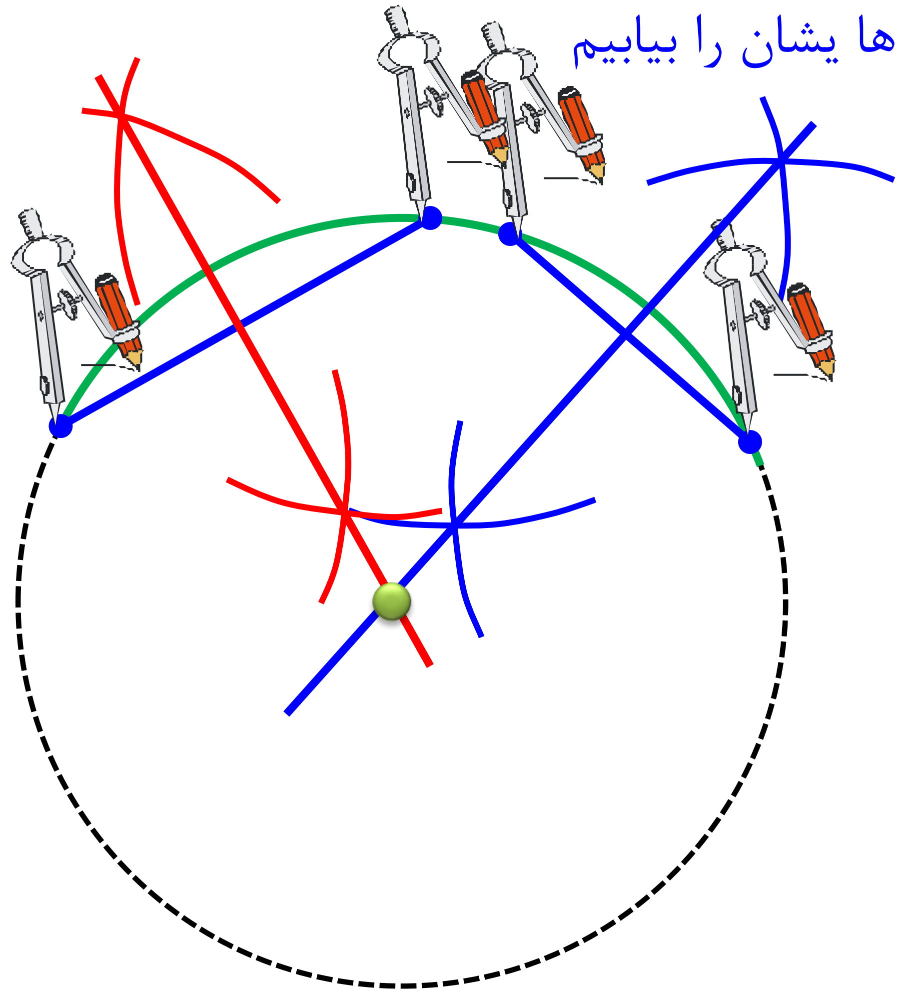
الف) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.

الف : عمود منصف AB از مرکز دایره می گذرد زیرا مرکز دایره از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است

ب : کافی است دو وتر غیر موازی از کمان را رسم نموده .سپس محل تقاطع عمود منصف ها یشان را بیابیم



فکر کنید

۱- دو نقطه B و A مفروض اند.
فقط با استفاده از پرگار و بدون استفاده از خطکش نقطه وسط آنها را تعیین کنید .

۲- دو نقطه B و A مفروض اند.
فقط با استفاده از خطکش نامدرج و بدون استفاده از پرگار نقطه وسط آنها را تعیین کنید .

درس دوم

استدلال

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

استدلال استقرایی: روش نتیجه گیری کلی براساس مجموعه ای محدود از مشاهدات و تجربیات است.

تذکر: به کمک استدلال استقرایی نمی توان به نتیجه قطعی رسید.

توجه : در استدلال استقرایی از جزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری کلی براساس حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.

تذکر: نتایج حاصل از استدلال استنتاجی همواره درست و قطعی است.

توجه : در استدلال استنتاجی از کل به جزء می رسیم

گزاره: جمله ای است خبری که درست یا نادرست باشد .اگر چه درستی یا نادرستی آن برای ما مشخص نباشد.

مثال: جمله های عدد ۲ اول است(صحیح). قطرهای هر مستطیل عمود منصف یکدیگرند(غلط).

فردا هوای تهران بارانی است (فردا مشخص می شود) گزاره هستند.

ولی جمله (هوای امروز خوب است) گزاره نیست زیرا نمی توان درستی یا نادرستی آن را تعیین کرد.

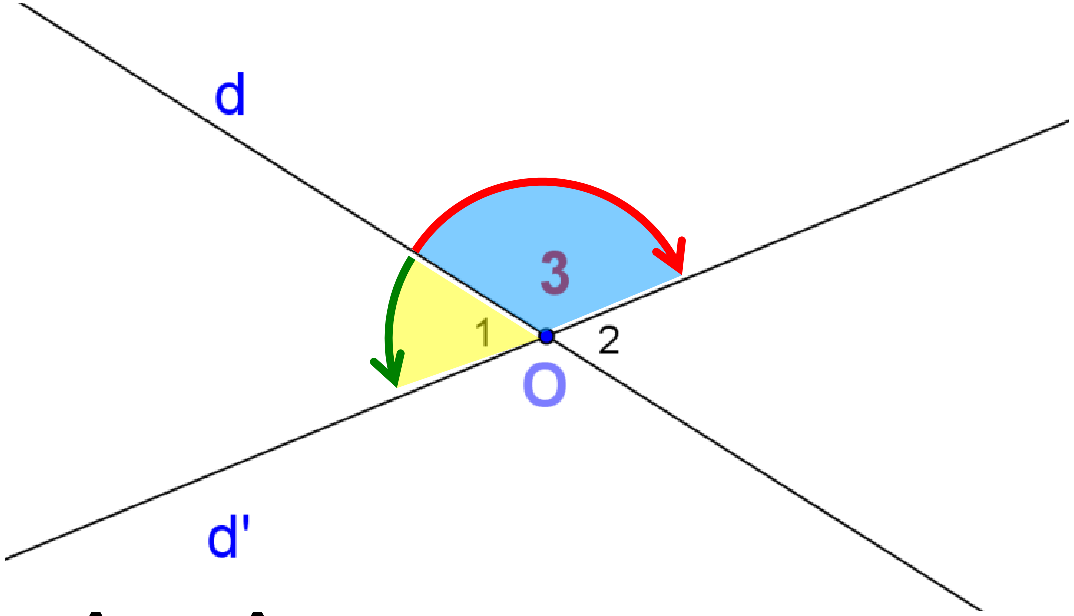
قضیه گزاره ای است که درستی آن ثابت شده است.

هر قضیه شامل دو قسمت فرض و حکم می باشد.

فرض : معلومات قضیه است

حکم : چیزی است که قرار است آن را اثبات کنیم یا درستی آن را بررسی نماییم

قضیه : زاویه های متقابل به راس مساوی اند



حکم

$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

فرض

زاویه های $O_۱ , O_۲$ متقابل به راس اند

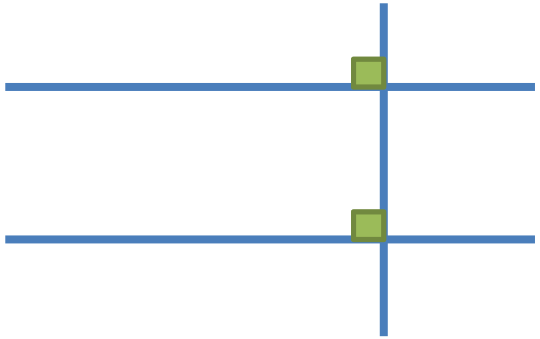
برهان :

$$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰° \qquad (۱)$$

$$\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰° \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \hat{O}_۱ + \cancel{\hat{O}_۳} = \hat{O}_۲ + \cancel{\hat{O}_۳} \rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

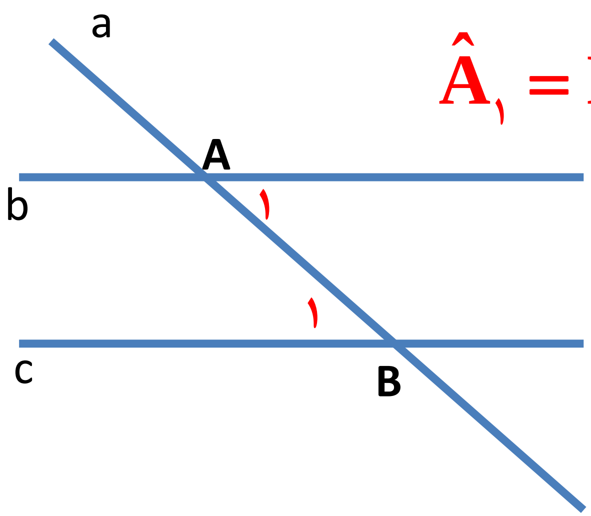
یاد آوری : اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.



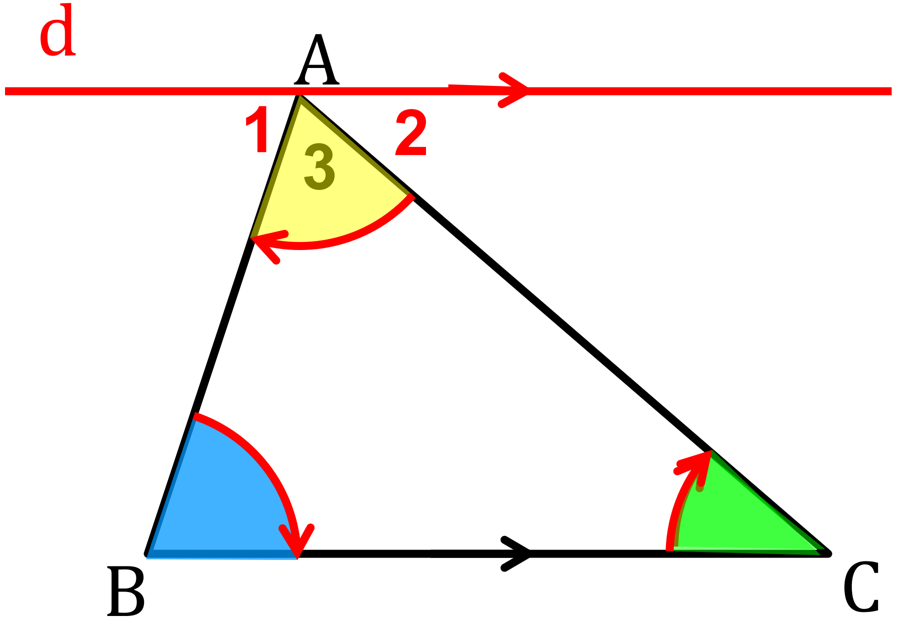
یادآوری : اگر خط a دو خط b , c را در نقاط B , A قطع کند(شکل مقابل) آنگاه :

الف : $b \parallel c \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$

ب : $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow b \parallel c$



قضیه : مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است



فرض

ΔABC

حکم

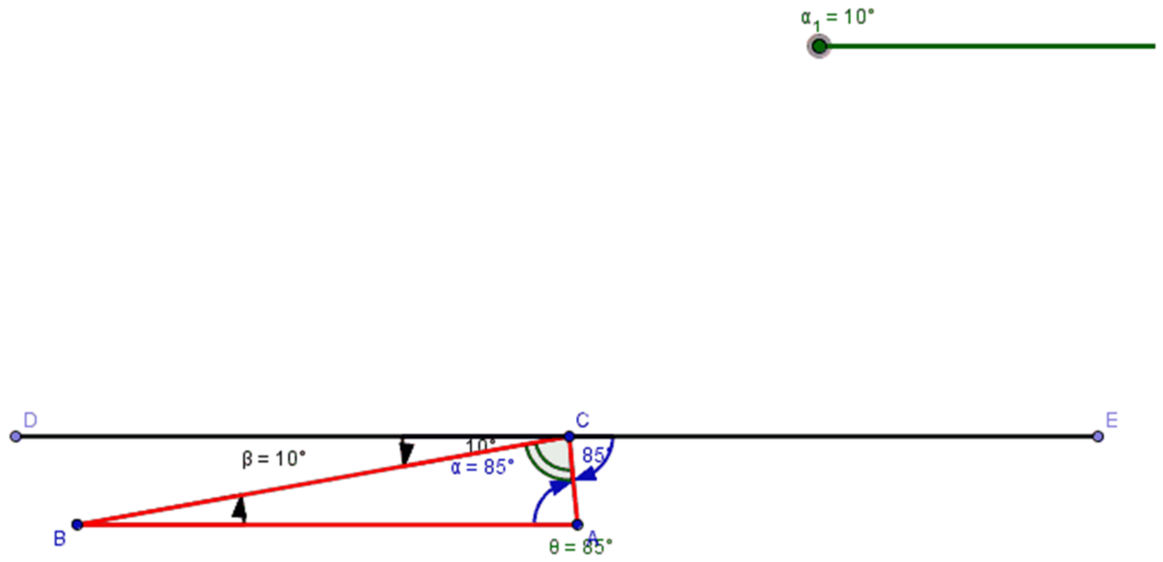
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

اثبات : از راس A خط d را موازی‌ضلع BC رسم می کنیم

مورب $AB, d \parallel BC \rightarrow \hat{B}=\hat{A}_{۱} \quad (۱)$

مورب $AC, d \parallel BC \rightarrow \hat{C}=\hat{A}_{۲} \quad (۲)$

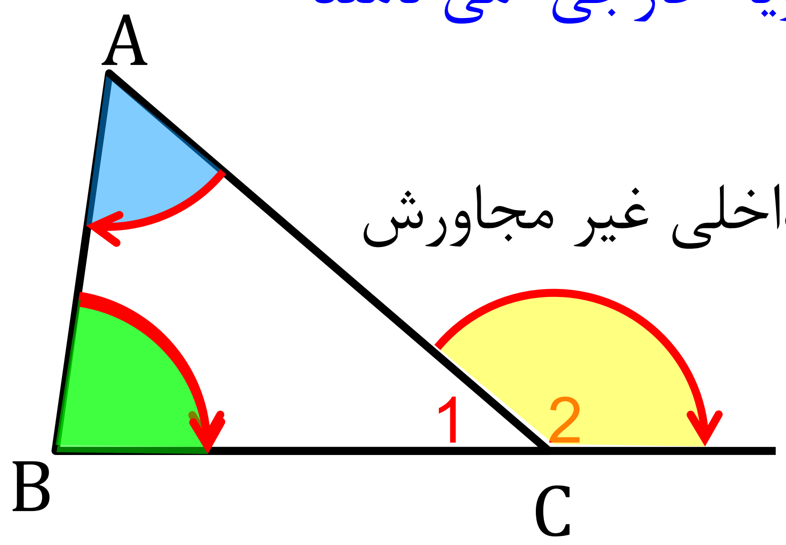
$$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_{۳}+\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۱۸۰^\circ$$



$$\alpha + \beta + \theta = 85^\circ + 10^\circ + 85^\circ = 180^\circ$$

تعریف زاویه خارجی چند ضلعی:

در هر چند ضلعی زاویه ای که از امتداد یک ضلع تشکیل می شود را زاویه خارجی می نامند



قضیه :

اندازه هر زاویه ی خارجی مثلث برابر مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاورش

حکم	فرض
$\hat{C}_{2}=\hat{A}+\hat{B}$	$\hat{C}_{2}$ زاویه خارجی

اثبات:

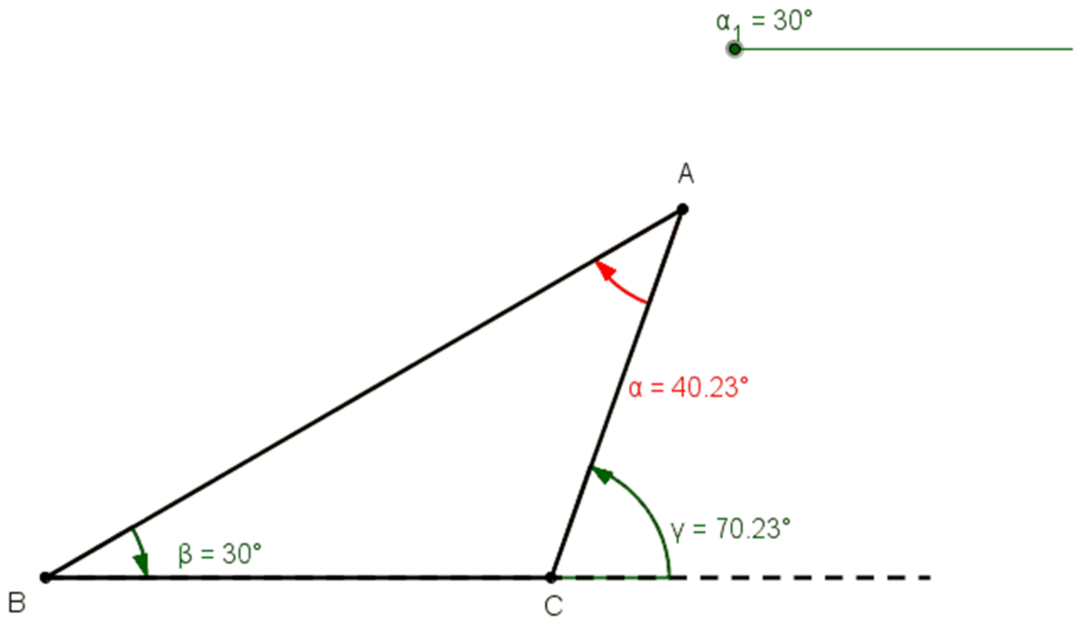
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_{1}=180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{C}_{1}+\hat{C}_{2}=180^\circ \quad (2)$$

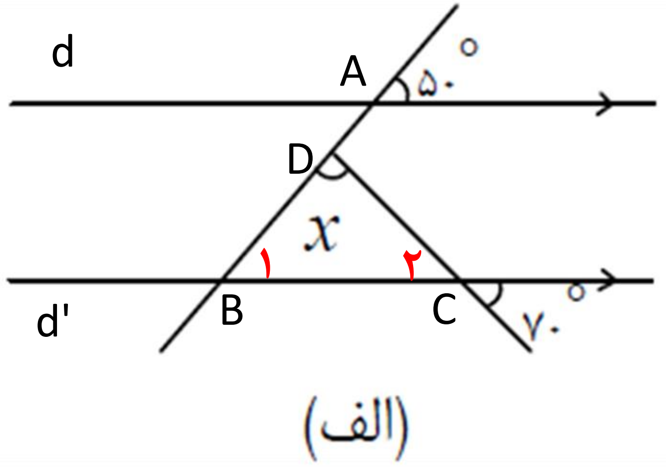
$$(1),(2)\rightarrow \hat{C}_{1}+\hat{C}_{2}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_{1}\rightarrow \hat{C}_{2}=\hat{A}+\hat{B}$$

$\alpha+\beta=40.23°+30°=70.23°$

$\gamma=70.23°$



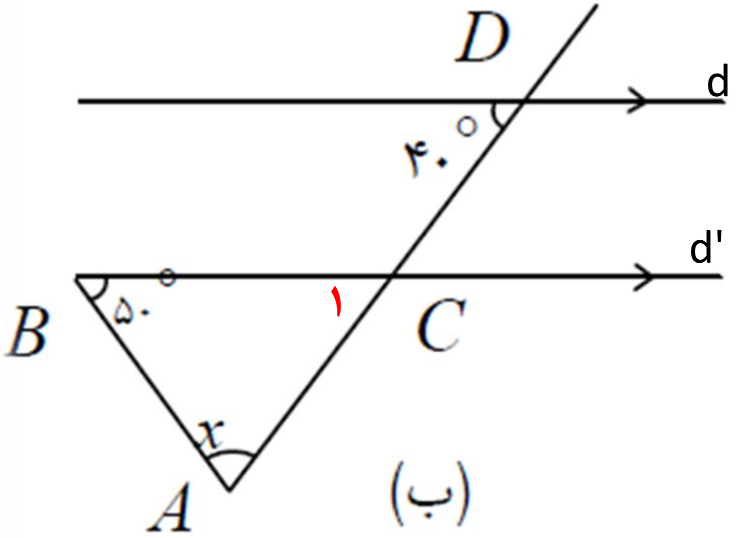
مثال ۱ : - در هر مورد x را بیابید.



الف: $\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = ۵۰°$ $\Leftarrow$ $AB, d \parallel d'$ مورب

متقابل به رأس $\hat{C}_۲ = ۷۰°$

$$\Rightarrow x = ۱۸۰° - (۵۰° + ۷۰°) = ۶۰°$$

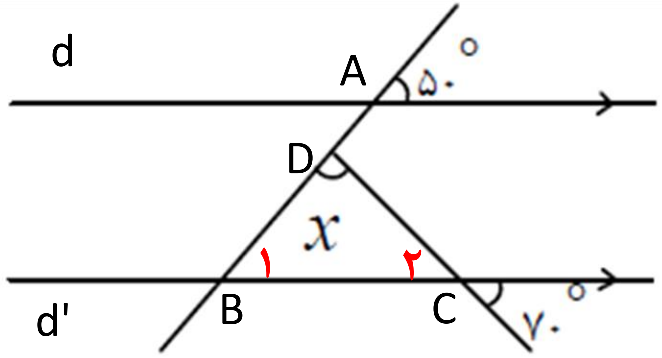


ب:

$\hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۰°$ $\Leftarrow$ $CD, d \parallel d'$ مورب

$$\Rightarrow x = ۱۸۰° - (۴۰° + ۵۰°) = ۹۰°$$

مثال ۱ : - در هر مورد x را بیابید.



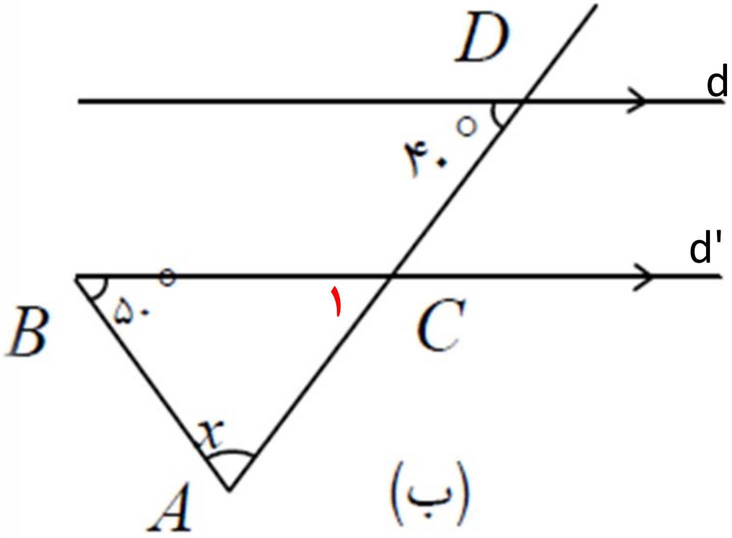
(الف)

الف:

$AB, d \parallel d' \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = ۵۰°$ مورب

$\hat{C}_۲ = ۷۰°$ متقابل به رأس

$$\Rightarrow x = ۱۸۰° - (۵۰° + ۷۰°) = ۶۰°$$



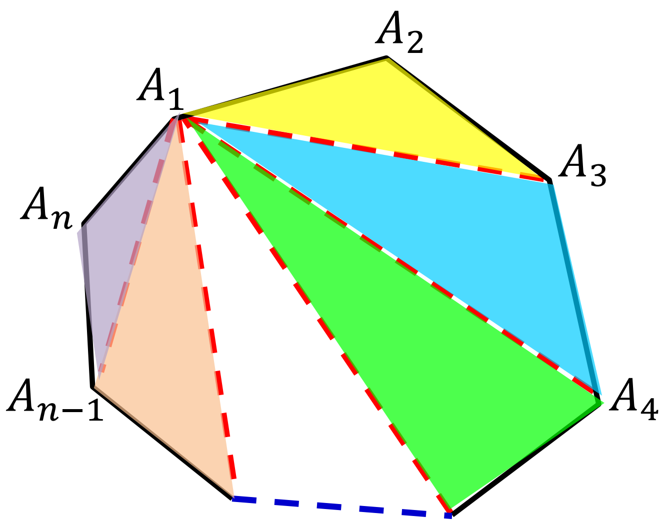
(ب)

ب:

$CD, d \parallel d' \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۰°$ مورب

$$\Rightarrow x = ۱۸۰° - (۴۰° + ۵۰°) = ۹۰°$$

مثال ۲: ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با : $(n-2)180°$

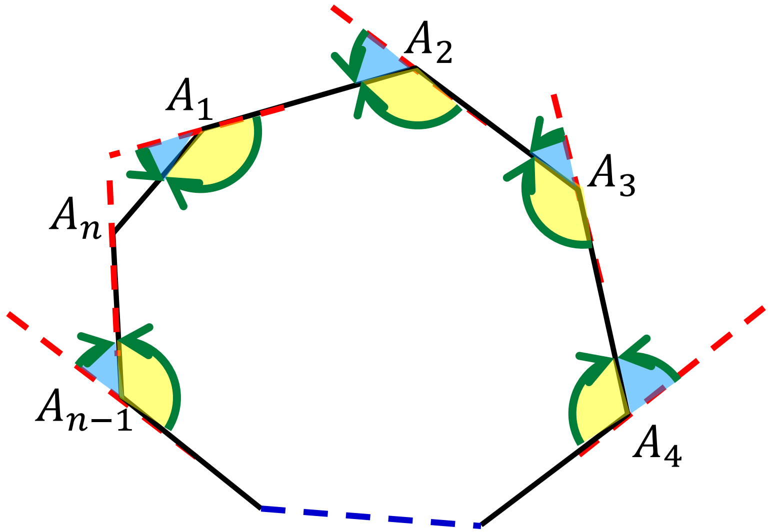


اثبات: n ضلعی $A_1A_2A_3 \dots A_n$ را در نظر می گیریم . از راس A_1 قطرهای A_1A_3 ,A_1A_4 ,A_1A_5 , … ,A_1A_{n-1} را رسم می کنیم .

تعداد مثلث های تشکیل شده از رسم قطرهای یک راس $n-2$ و مجموع زاویه های داخلی هر مثلث $180°$است.

پس مجموع زاویه های داخلی n ضلعی برابر است با :$(n-2)180°$

مثال ۳ : ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



اثبات : می دانیم مجموع زاویه های داخلی و خارجی هر راس $180°$ است. پس مجموع کل زاویه های داخلی و خارجی n ضلعی محدب $180° \times n$ درجه است :

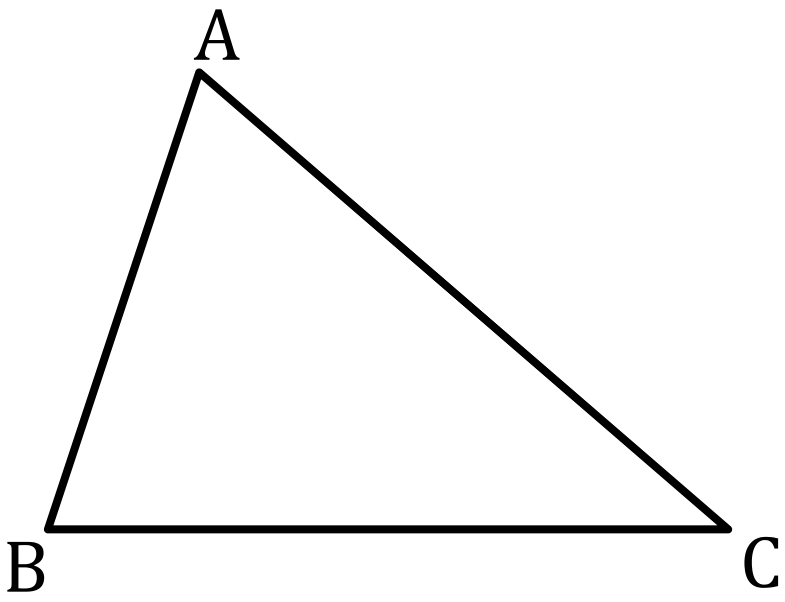
$$\text{مجموع اندازه زاویه های داخلی و خارجی} = 180°n \quad (1)$$

$$\text{مجموع اندازه زاویه های داخلی} = 180°(n-2) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \text{مجموع اندازه زاویه های خارجی} = 180°n - (n-2)180°$$

$$\text{مجموع اندازه زاویه های خارجی} = 180°n - 180°n + 360° = 360°$$

مثال ۴ : زاویه های داخلی مثلثی با اعداد ۷ و ۵ و۳ متناسب اند . اندازه ی کوچکترین زاویه ی خارجی این مثلث چند درجه است ؟



پاسخ :

$$\frac{\hat{A}}{7}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{3}=t$$

$$\Rightarrow \hat{A}=7t\ ,\hat{B}=5t\ ,\hat{C}=3t$$

می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث $180°$ است.

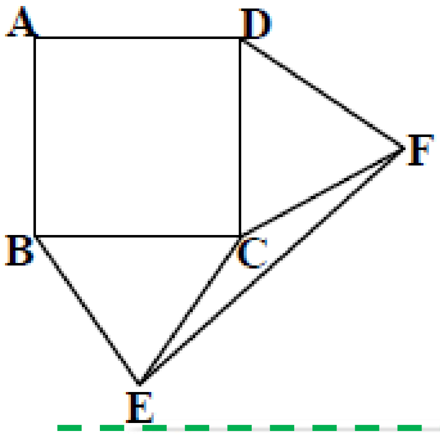
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180° \Rightarrow 7t+5t+3t=180°$$

$$\Rightarrow 15t=180° \ \Rightarrow t=12° \ \Rightarrow \hat{A}=84°\ ,\hat{B}=60°\ ,\hat{C}=36°$$

اندازه کوچکترین زاویه خارجی$= 180°-84°=96°$

مثال ۵ :

در شکل روبرو $\square ABCD$ مربع است و $\triangle FCD, \triangle BCE$ متساوی الاضلاع هستند نشان دهید $\triangle CEF$ متساوی الساقین است؟

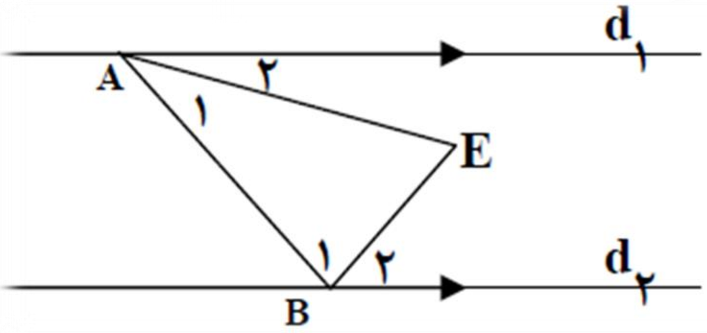


پاسخ:

$$\left.\begin{array}{ll} \square ABCD; & BC=CD \\ \triangle BCE; & BC=CE \\ \triangle CDF; & CD=CF \end{array}\right\} \rightarrow CE=CF$$

مثال ۶:

در شکل روبرو $\hat{B}_۱ = ۲\hat{B}_۲$, $\hat{A}_۱ = ۲\hat{A}_۲$ نشان دهید : $\hat{E} = ۶۰^\circ$



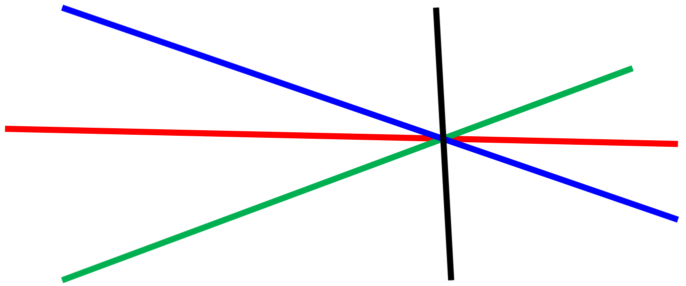
$d_۱ \parallel d_۲ , AB$ مورب $\Rightarrow \hat{B}_۳ = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ \quad (۱)$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = ۲\hat{A}_۲ , \hat{B}_۱ = ۲\hat{B}_۲ \\ \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ + \hat{B}_۳ = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(۱)} \hat{B}_۱ + \frac{۱}{۲}\hat{B}_۱ + \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ + \frac{۱}{۲}\hat{B}_۱ + \hat{A}_۱ + \frac{۱}{۲}\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{B}_۱ + \frac{۳}{۲}\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\div \frac{۳}{۲}} \hat{B}_۱ + \hat{A}_۱ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \triangle ABE ; \hat{E} = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

تعریف خطوط همرس : هرگاه چند خط یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند آنها را خطوط همرس می نامند.



مثال ۲: با رسم چند مثلث بطور استقرایی بررسی کنید آیا :

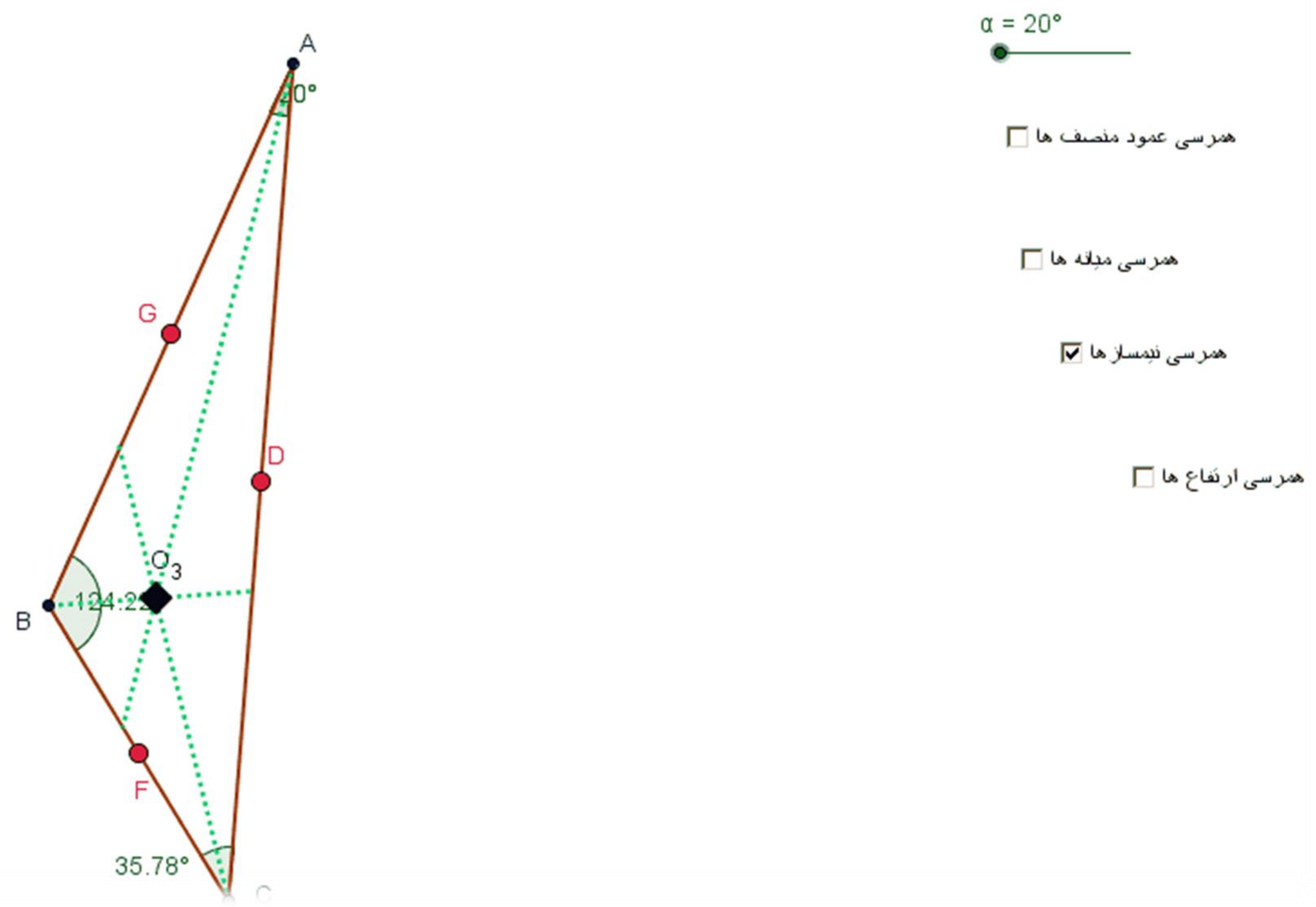
الف : نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث همرس اند؟

ب : ارتفاع های مثلث همرس اند؟

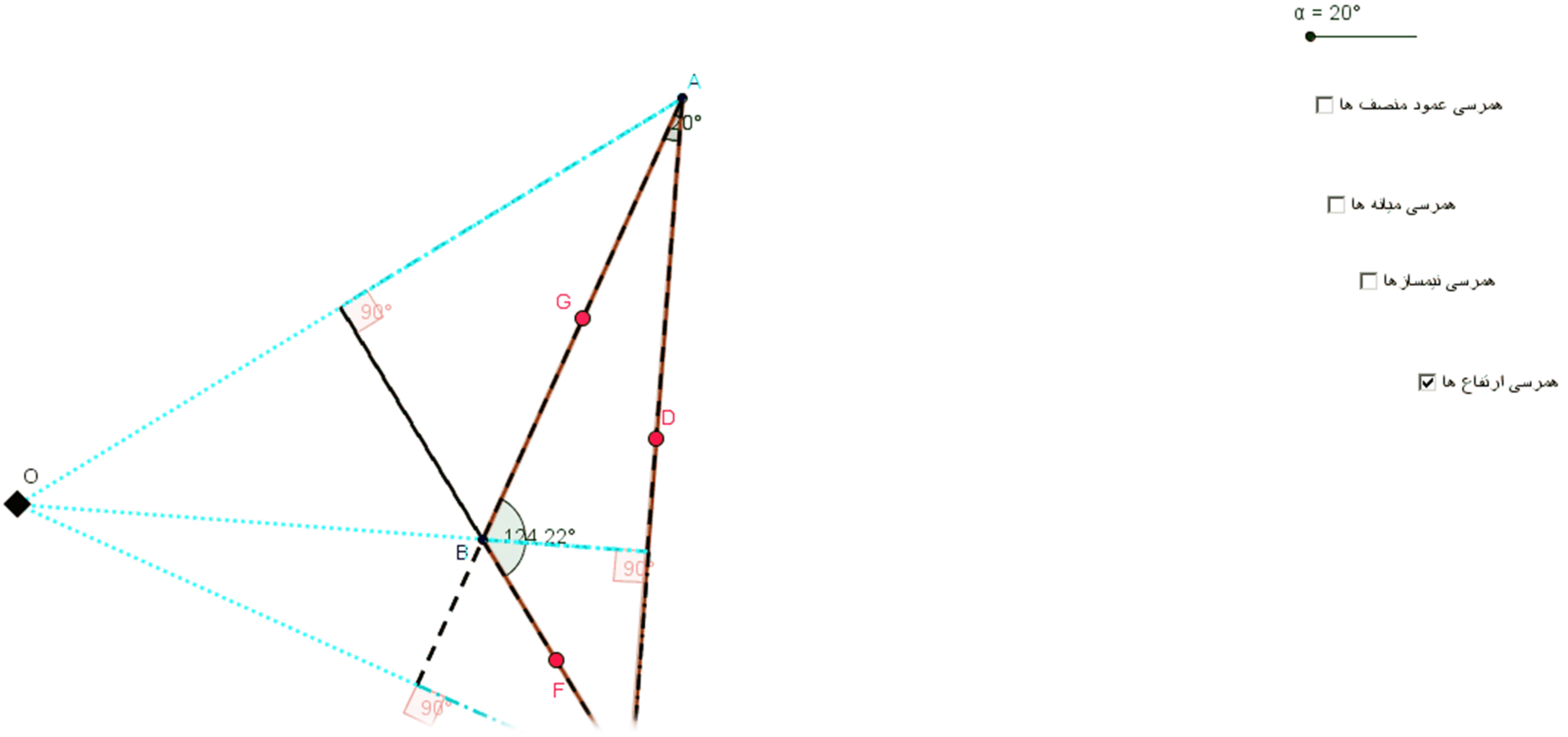
ج : میانه های مثلث همرس اند ؟

د : عمود منصف های اضلاع مثلث همرس اند؟

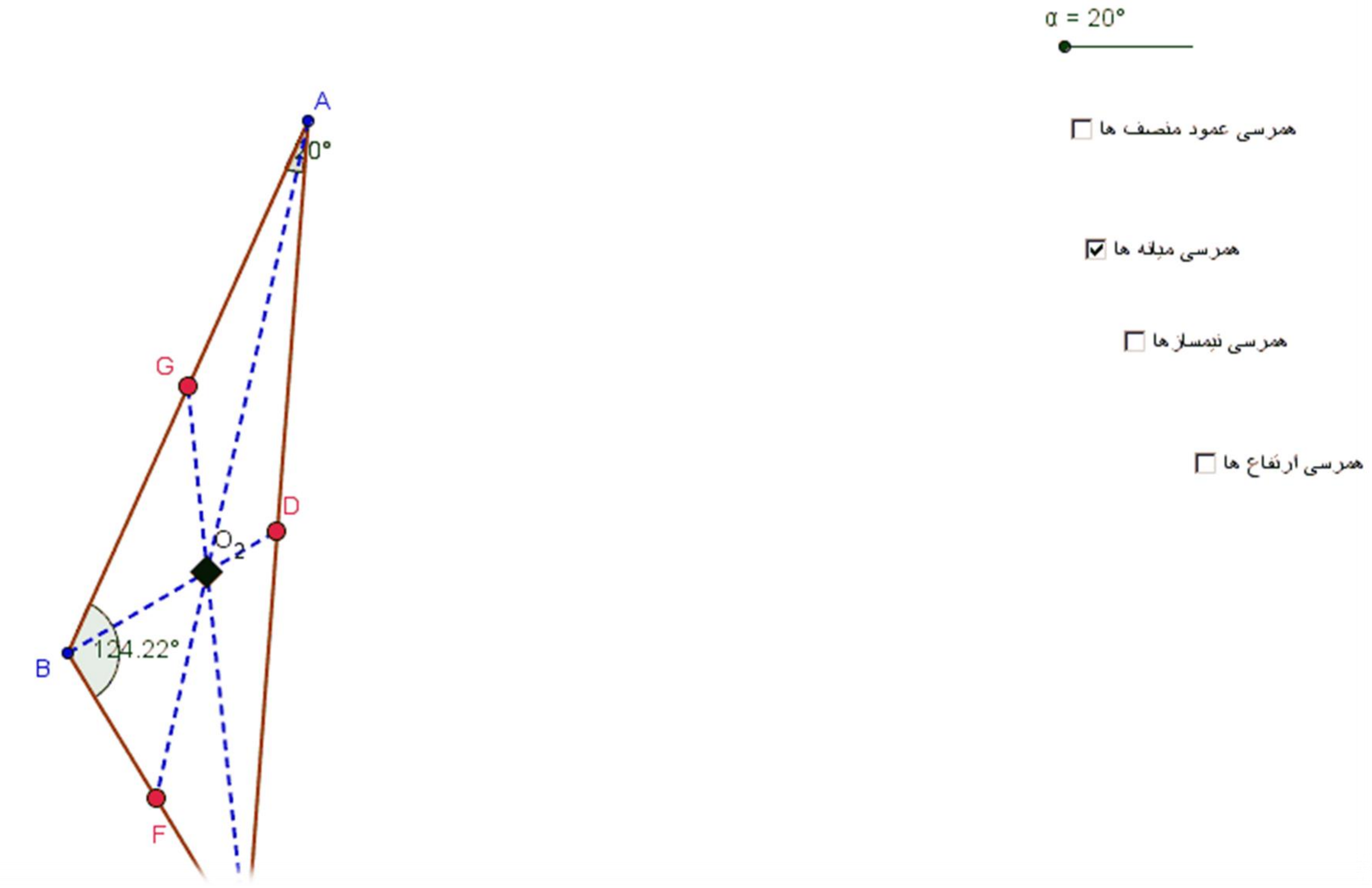
پاسخ الف : بله　　**پاسخ ب :** بله　　**پاسخ ج :** بله　　**پاسخ د :** بله



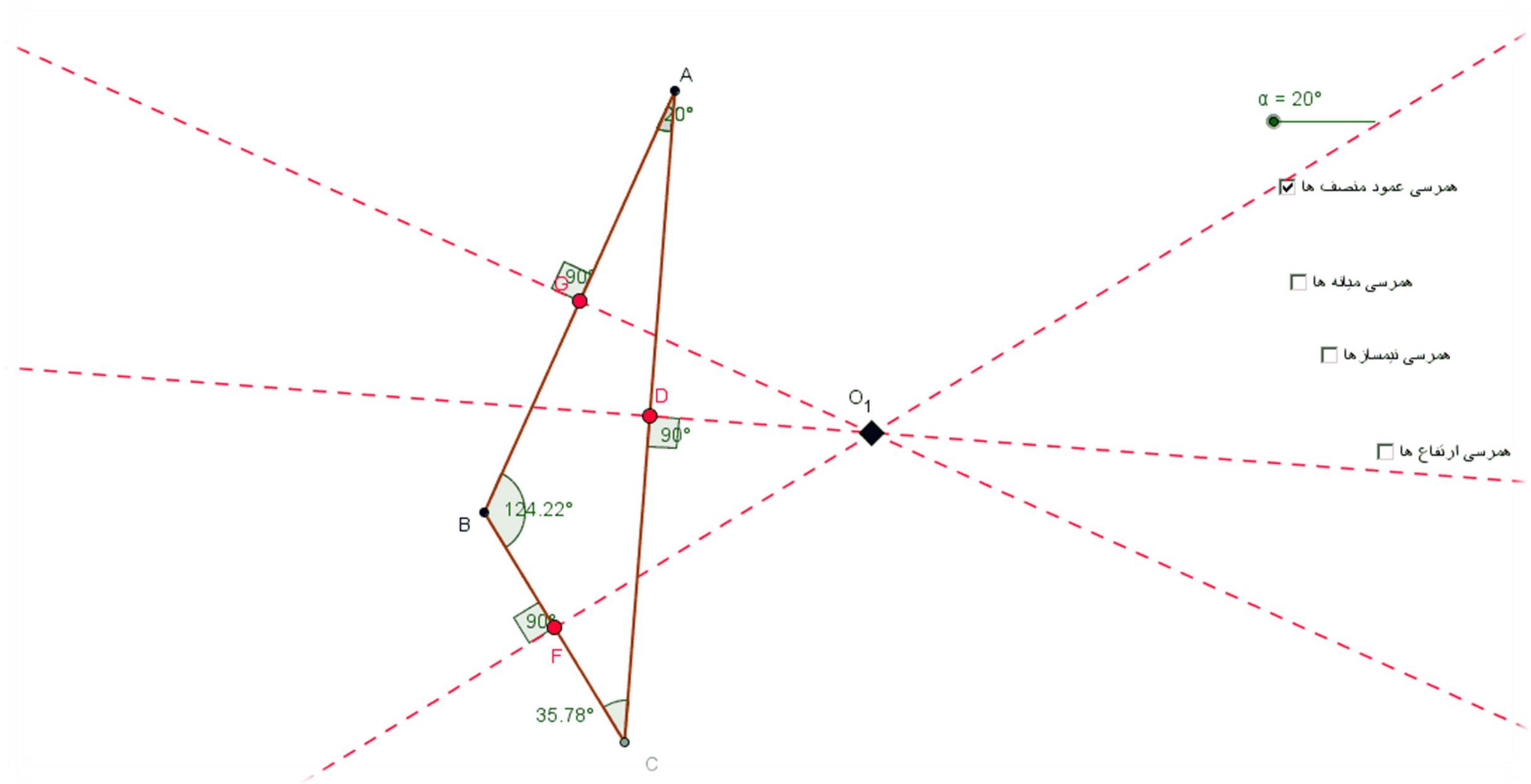
A
20°
G
D
O_3
B
124.22°
F
35.78°
α = 20°
همرسی عمود منصف ها
همرسی میانه ها
همرسی نیمساز ها
همرسی ارتفاع ها



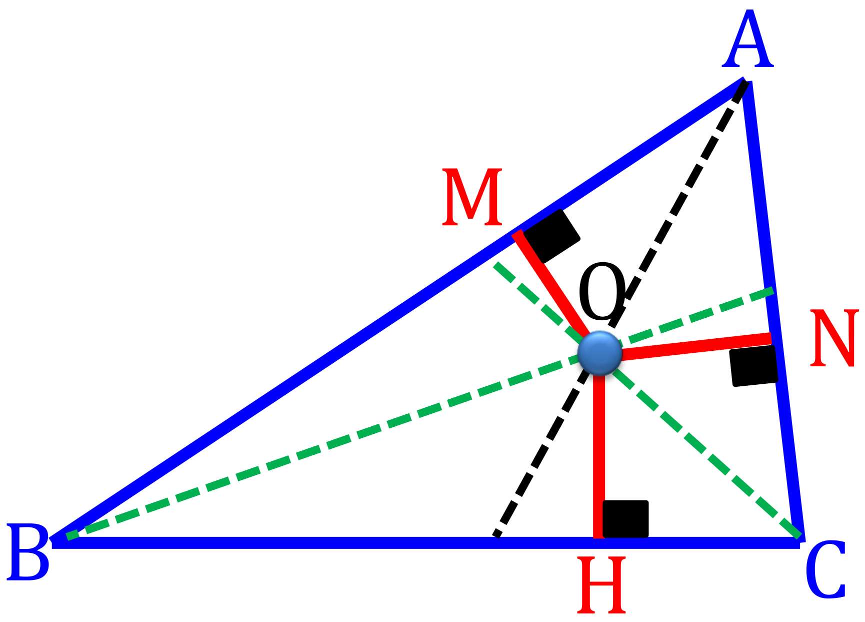
α = 20°
همرسی عمود منصف ها
همرسی میانه ها
همرسی نیمساز ها
همرسی ارتفاع ها
A
20°
G
90°
D
O
B
124.22°
90°
F
90°



α = 20°
همرسی عمود منصف ها
همرسی میانه ها
همرسی نیمساز ها
همرسی ارتفاع ها
A
20°
G
D
O2
B
124.22°
F



A
20°
α = 20°
همرسی عمود منصف ها
همرسی میانه ها
همرسی نیمساز ها
همرسی ارتفاع ها
90°
G
D
O1
90°
124.22°
B
90°
F
35.78°
C



قضیه : نیمساز های زاویه های داخلی هر مثلث همرس اند.

اثبات : فرض کنیم نیمساز های زاویه های Bو C یکدیگر را در نقطه O قطع کرده باشند .

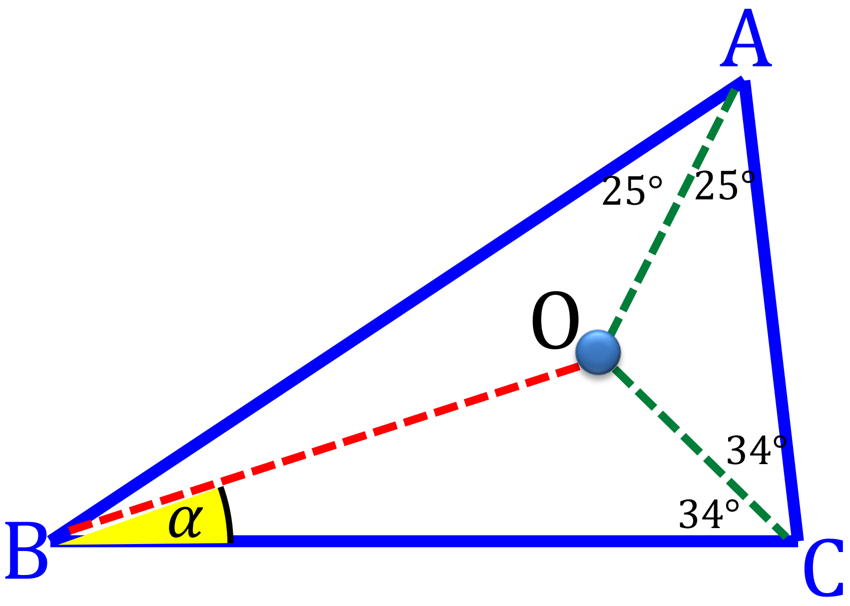
عمودهای OH ،ON ،OM را به ترتیب بر اضلاع BC ،AC ،AB وارد می کنیم. بنا به ویژگی نیمساز :

Oروی نیمساز زاویه B قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{OM = OH}$

Oروی نیمساز زاویه C قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{ON = OH}$

$\rightarrow \mathbf{OM = ON} \Rightarrow$ Oروی نیمساز زاویه A قرار دارد

پس هر سه نیمساز در نقطه O همرس اند .



مثال ۱ : در شکل مقابل اندازه α چند درجه است ؟

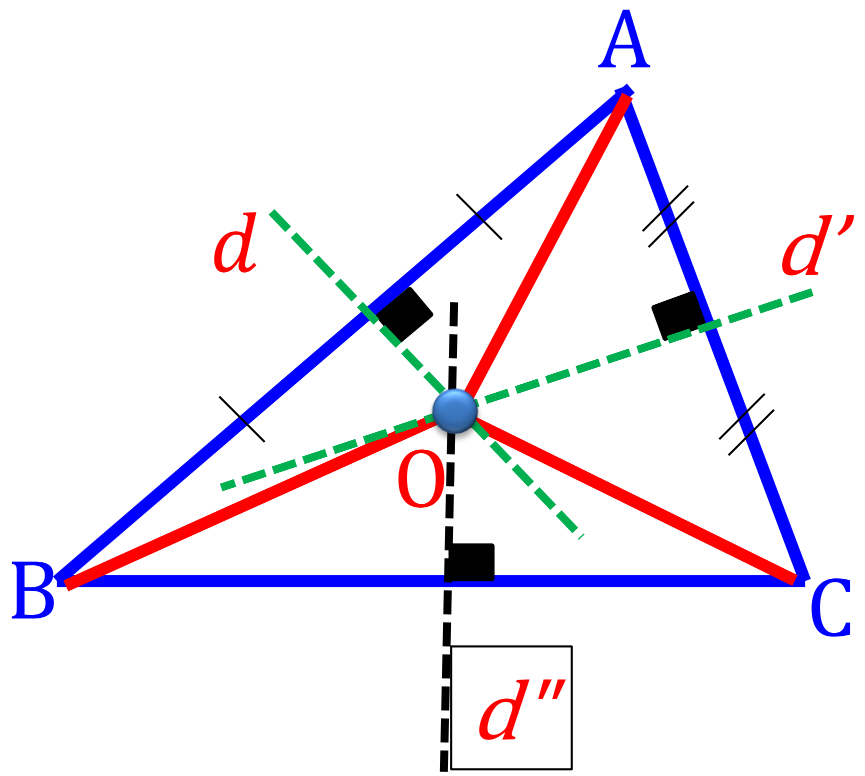
پاسخ : نیمساز های زاویه های Bو C یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند . پس OB نیمساز زاویه داخلی B است

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180° \quad \Rightarrow 50°+2\alpha+68°=180°$$

$$\Rightarrow 2\alpha=62°$$

$$\Rightarrow \alpha=31°$$

قضیه : عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرس اند.



اثبات : فرض کنیم عمود منصف های اضلاع AB و AC یکدیگر را در نقطه O قطع کرده باشند .

نقطه Oرا به راس های A ,B ,C وصل می کنیم. بنا به ویژگی عمود منصف :

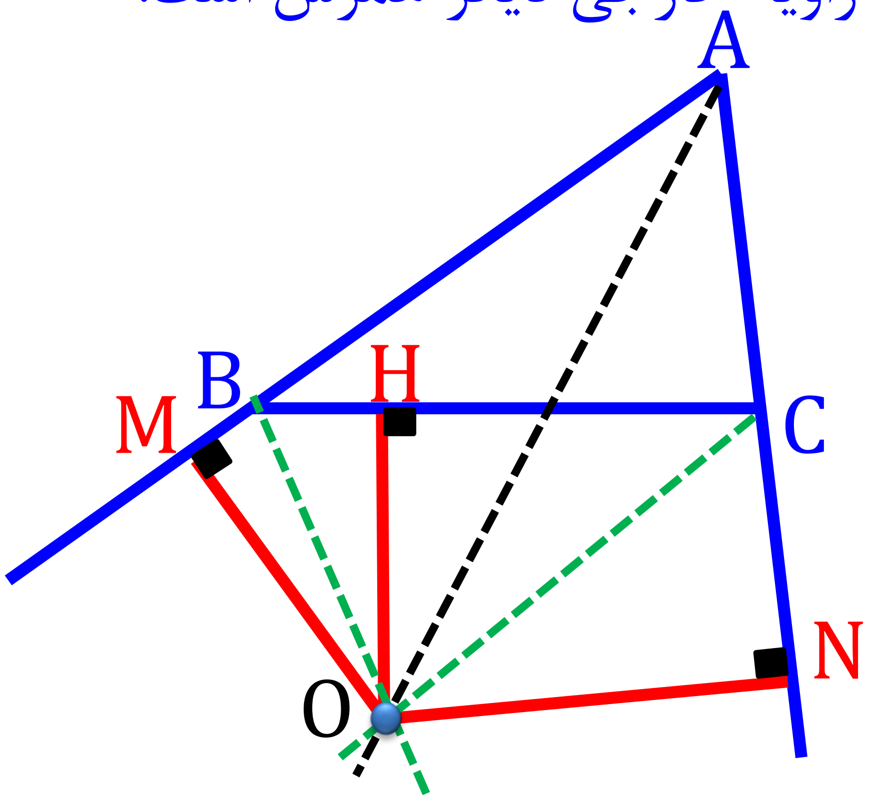
Oروی عمود منصف ضلع AB قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{OA = OB}$

Oروی عمود منصف ضلع AC قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{OA = OC}$

$\rightarrow \mathbf{OB = OC} \Rightarrow$ Oروی عمود منصف ضلع BC قرار دارد

پس هر سه عمود منصف در نقطه O همرس اند .

سوال : ثابت کنید نیمساز هر زاویه داخلی یک مثلث با نیمسازهای دو زاویه خارجی دیگر همرس است.



اثبات : فرض کنیم نیمساز های زاویه های خارجی B و C یکدیگر را در نقطه O قطع کرده باشند .

عمودهای OH، ON، OM را به ترتیب بر امتداد اضلاع BC، AC، AB وارد می کنیم. بنا به ویژگی نیمساز :

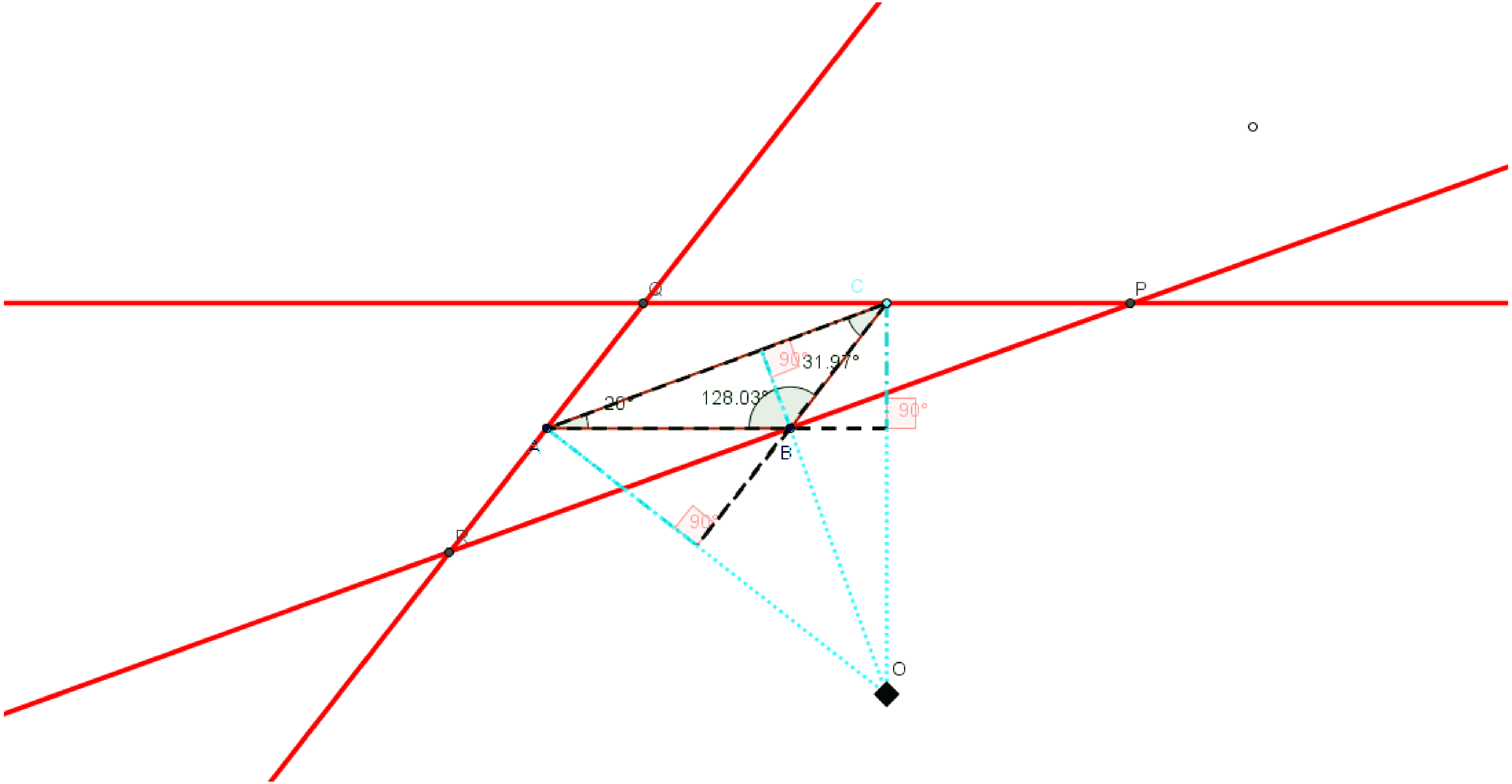
O روی نیمساز زاویه B قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{OM = OH}$

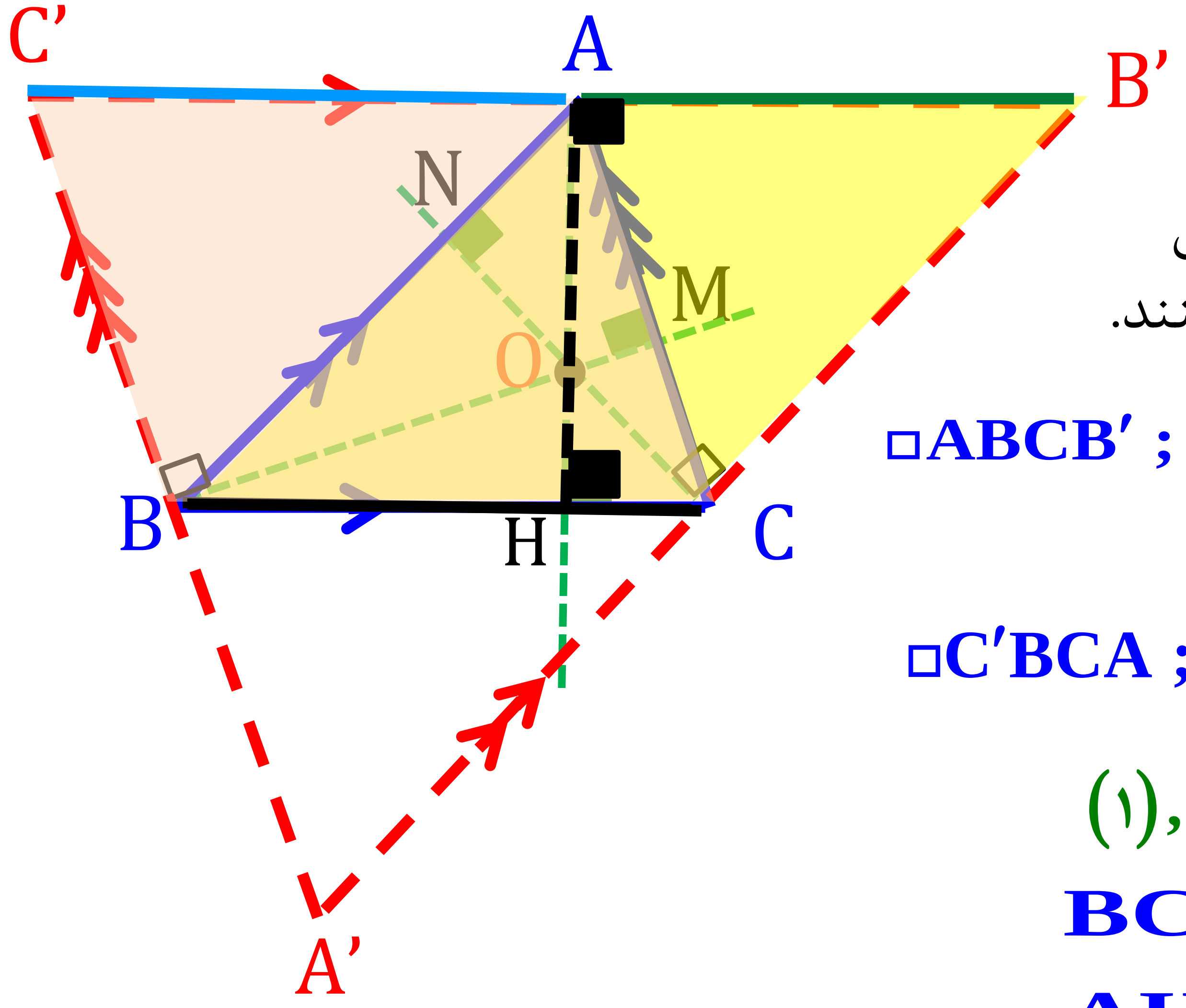
O روی نیمساز زاویه C قرار دارد $\Rightarrow \mathbf{ON = OH}$

$\rightarrow \mathbf{OM = ON} \Rightarrow$ O روی نیمساز زاویه A قرار دارد

پس هر سه نیمساز در نقطه O همرس اند .

قضیه : ارتفاع های هر مثلث همرس اند.





اثبات : فرض کنیم AH,BM,CN ارتفاع های وارد بر اضلاع BC,AC,AB باشند.

از راس های مثلث ΔABC سه خط به موازات اضلاع آن رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقاط A',B',C' قطع کنند.

$$\square ABCB' \; ; \; \left.\begin{matrix} BC \parallel AB' \\ AB \parallel B'C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}} AB' = BC \quad (۱)$$

$$\square C'BCA \; ; \; \left.\begin{matrix} AC' \parallel BC \\ BC' \parallel AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}} AC' = BC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AB' = AC' \quad (۳)$$

$$\left.\begin{matrix} BC \parallel B'C' \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \rightarrow AH \perp B'C' \quad (۴)$$

(۳),(۴) → AH عمود منصف B’C’است.

به طریق مشابه BM,CNعمود منصف های اضلاع A’C’,A’B’ از مثلث A’B’C’ هستند. لذا بنا به قضایای قبلAH,BM,CN همرس اند .

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

مثال : کدامیک از جملات زیر گزاره هستند.

الف : هزارمین رقم بعد از اعشار عدد پی یک عدد اول است.

ب : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۱۸۰ درجه است

ج : هر عدد طبیعی زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت .

د : چهار ضلعی ها از مثلث ها زیباترند.

هــ : چه سوال سختی !

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

پاسخ :

الف : اگر چه بدست آوردن ارزش این جمله خبری برای ما دشوار است ولی کاملا مشخص است که ارزش این جمله دقیقا درست یا دقیقا غلط است پس این جمله یک گزاره است.

ب : می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰ درجه است . پس ارزش این جمله خبری دقیقا غلط است پس این جمله یک گزاره است.

ج : این جمله خبری به حدس گلدباخ معروف است وکسی تا کنون موفق به اثبات یا رد آن نشده ولی کاملا مشخص است که ارزش این جمله دقیقا درست یا دقیقا غلط است پس این جمله یک گزاره است.

د : زیبایی یک مفهوم نسبی و سلیقه ای است پس این جمله خبری هیچگاه نمی تواند به طور مطلق درست یا به طور مطلق غلط باشد پس این جمله یک گزاره نیست.

هـ : این جمله یک جمله خبری نیست .پس این جمله یک گزاره نیست.

تعریف نقیض (نفی)گزاره : نقیض یک گزاره یعنی گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقا مخالف ارزش گزاره اصلی باشد.

مثال : نقیض هریک از گزاره های زیر را بنویسید.

الف : ۲ فرد است.

پاسخ : (چنین نیست که ۲ فرد باشد.) ≡ (۲ زوج است .) ≡ (۲ فرد نیست.)

ب : ۲<۳

پاسخ : (چنین نیست که ۲<۳) ≡ $(3 \leq 2) \equiv (3 \ngtr 2)$

ج : هر مربع چهار محور تقارن دارد.

پاسخ : (چنین نیست که هر مربع چهار محور تقارن داشته باشد.) ≡ (مربعی وجود دارد که چهار محور تقارن نداشته باشد.)

تعریف مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری یا حدس کلی نادرست است مثال‌نقض گفته می شود

مثال ۱ : به کمک مثال نقض نادرستی هر یک از حکم های کلی زیر را نشان دهید.

الف : مجذور هر عدد از خودش بزرگتر است.

ب : مجموع دو عدد گنگ عددی گنگ است.

ج : عدد محیط هر چند ضلعی از عدد مساحتش کمتر است.

د : هر متوازی الاضلاع لوزی است.

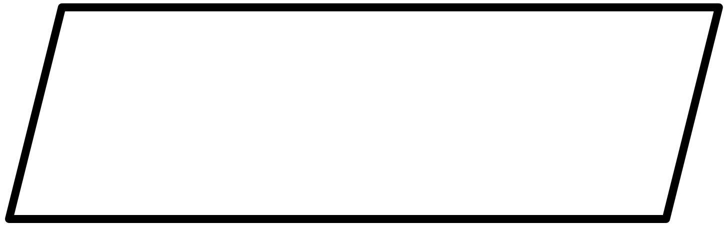
پاسخ :

الف : $(0/1)^2 < 0/1$

ب : $\left.\begin{array}{l} a = 1+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ b = 3-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \end{array}\right\} \rightarrow a+b = 1+\cancel{\sqrt{2}} + 3 - \cancel{\sqrt{2}} = 4 \in \mathbb{Q}$

ج : مستطیلی به ابعاد ۳ و ۲ دارای محیط ۱۰ است ولی مساحت آن ۶ است که از محیط کمتر است.

د : در بعضی از متوازی الاضلاع ها طول اضلاع برابر نیست و لذا نمی توانند لوزی باشند.



تعریف قضیه: حکم کلی است که درستی آن ثابت شده باشد.

توجه : هر قضیه شرطی یک جمله شرطی است و صورت کلی قضیه های شرطی عبارت است از :

« اگر   فرض   آنگاه   حکم »

به زبان ریاضی قضیه شرطی بصورت $p \Rightarrow q$ بیان می شود.

تعریف عکس قضیه شرطی: اگر جای فرض و حکم در یک قضیه شرطی عوض شود ، عبارت شرطی حاصل را عکس قضیه ی شرطی می نامند.

مثال ۱ : قضیه شرطی : اگرمثلثی دو ضلع برابر داشته باشد آنگاه آن مثلث دو زاویه برابر دارد.

عکس قضیه : اگرمثلثی دو زاویه ی برابر داشته باشد آنگاه آن مثلث دارای دو ضلع برابر است. (صحیح)

مثال ۲ : قضیه شرطی : اگر یک چهارضلعی مربع باشد . آنگاه قطرهایش بر هم عمودند

عکس قضیه : اگر قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند آنگاه آن چهارضلعی مربع است . (غلط)

نتیجه : عکس یک قضیه ی شرطی لزوماً یک قضیه ی شرطی نیست .
به عبارت دیگر عکس یک قضیه شرطی می تواند یک گزاره درست یا یک گزاره غلط باشد.

تعریف قضیه دو شرطی : اگر عکس یک قضیه ی شرطی ، خود یک قضیه ی شرطی باشد. آنگاه این دو قضیه را بصورت یک قضیه ی دو شرطی بیان می کنند.

قضیه دو شرطی : فرض اگر وتنها اگر حکم

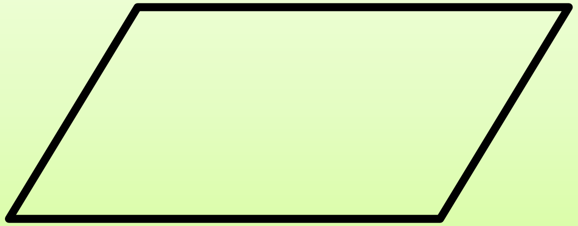
مثال ۱: عکس هریک از قضیه های زیر را نوشته سپس اگر عکس قضیه ی شرطی ، خود یک قضیه ی شرطی بود آنرا بصورت یک قضیه ی دو شرطی بیان کنید. در غیر این صورت نادرستی آن را به کمک مثال نقض نشان دهید.

الف: اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد. آنگاه آن چهارضلعی ، متوازی الاضلاع است.

پاسخ : عکس قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد. آنگاه آن چهارضلعی ، مستطیل است.

مثال نقض : شکل مقابل متوازی الاضلاع است.

ولی مستطیل نیست. زیرا زاویه ی قائمه ندارد.



ب : اگر دو مثلث همنهشت باشند. آنگاه اضلاع متناظر آنها مساوی اند.

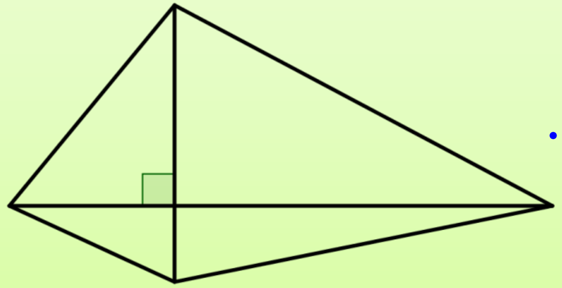
پاسخ : عکس قضیه شرطی : اگر اضلاع متناظر دو مثلث مساوی باشند.آنگاه آن دو مثلث همنهشت اند . (ص)

قضیه دو شرطی : دو مثلث همنهشت انداگر وتنها اگر اضلاع نظیر آنها مساوی باشند.

ج: اگر یک چهارضلعی لوزی باشد آنگاه قطرهایش بر هم عمودند.

پاسخ : عکس قضیه شرطی :

اگر قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند . آنگاه آن چهار ضلعی لوزی است. (غ)



مثال نقض : قطرهای چهار ضلعی مقابل بر هم عمودند ولی لوزی نیست.

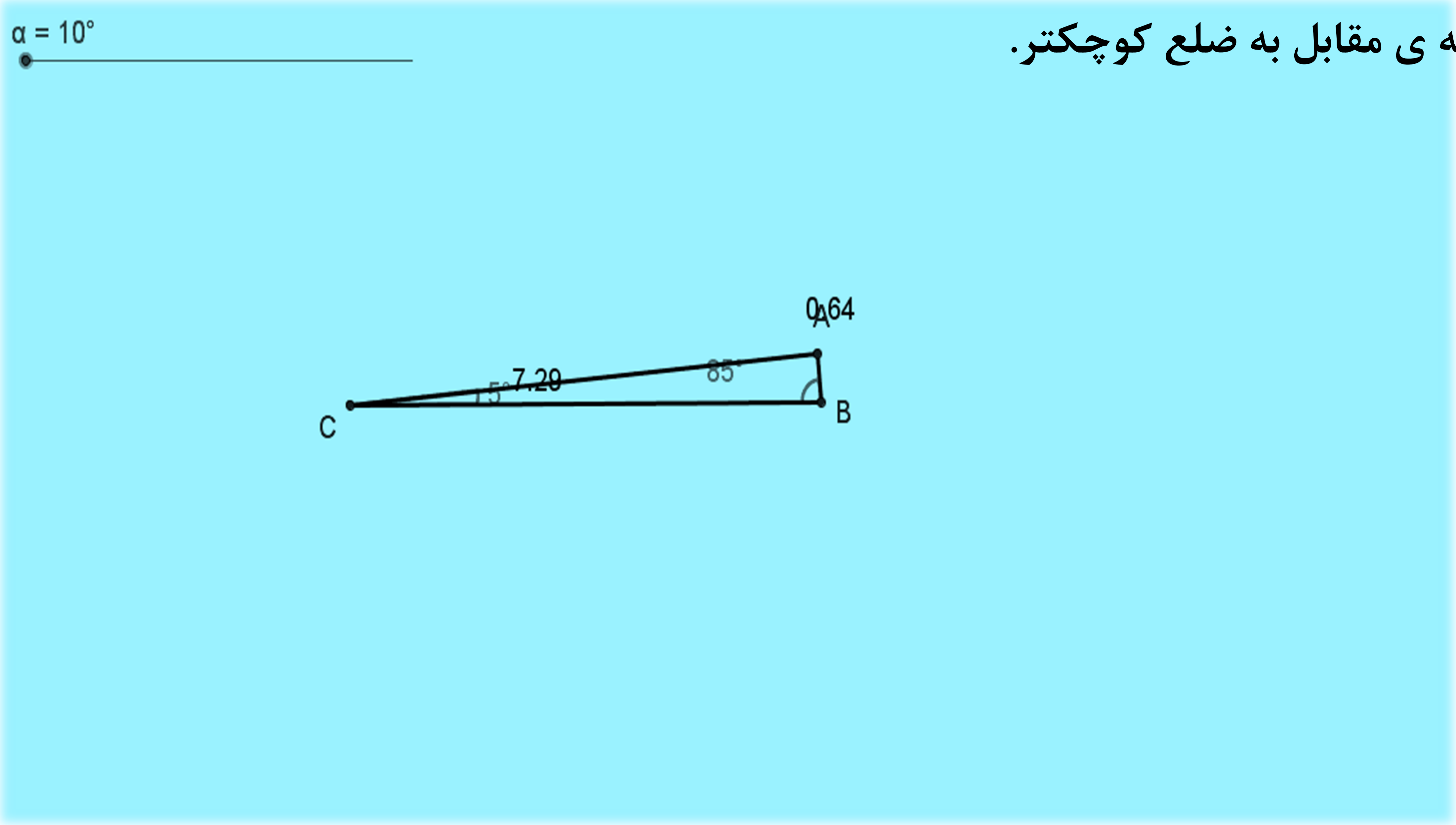
یادآوری ۱

در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبرو به ساق ها مساوی اند

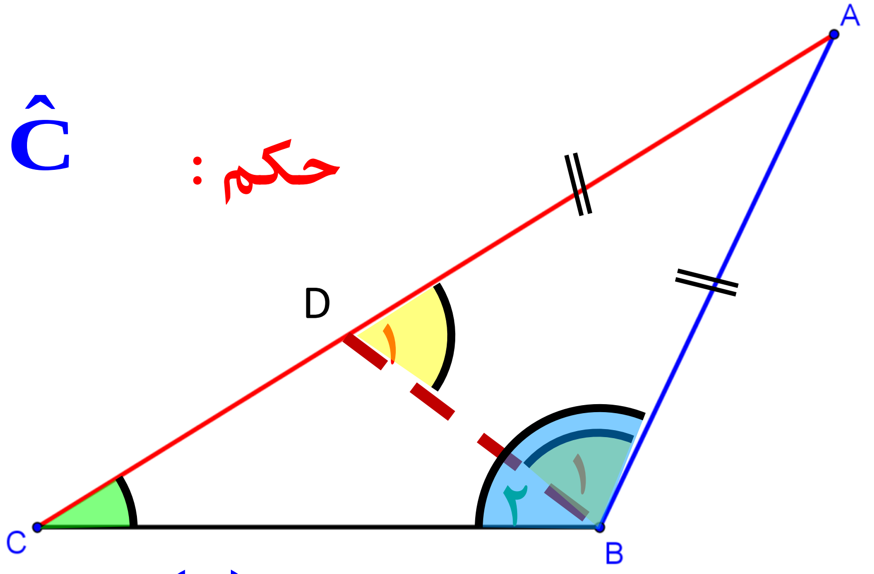
یادآوری ۲

اندازه هر زاویه خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاورش . پس هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگتر است.

قضیه : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر ، بزرگتر است از زاویه ی مقابل به ضلع کوچکتر.



حکم : $\hat{B} > \hat{C}$ فرض : $AC > AB$



اثبات : روی ضلع بزرگتر یعنی AC نقطه D را

اختیار می کنیم که : $AD = AB$

$\triangle ABD \,;\, AD = AB \rightarrow \hat{B}_{۱} = \hat{D}_{۱}$ (۱)

$\triangle ABC \,;\, \hat{B} = \hat{B}_{۱} + \hat{B}_{۲} \rightarrow \hat{B} > \hat{B}_{۱}$ (۲)

$\triangle DBC \,;\, \hat{D}_{۱} = \hat{B}_{۲} + \hat{C} \rightarrow \hat{D}_{۱} > \hat{C}$ (۳)

(۱),(۲),(۳) $\rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

برهان خلف

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

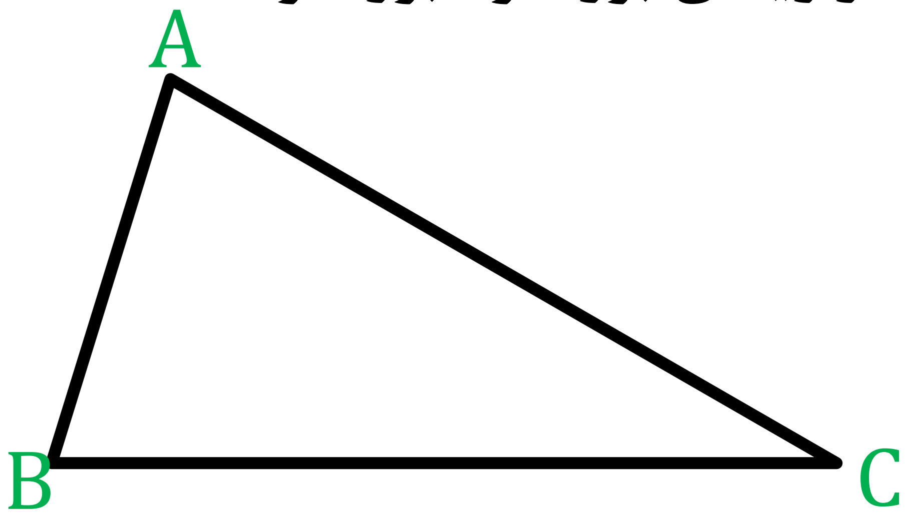
گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.

گام ۳: حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرضی که در گام اوّل کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب باید درست باشد.

به عبارت دیگر در برهان خلف به جای آنکه که طور مستقیم ثابت کنیم که حکم درست است باید ثابت کنیم که خلاف حکم نادرست است.

قضیه : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر.



حکم

$AC > AB$

فرض

$\hat{B} > \hat{C}$

برهان خلف : فرض کنیم $AC \not> AB$

در این صورت :

۱) اگر $AC = AB$ مثلث متساوی الساقین خواهد بود لذا $\hat{B} = \hat{C}$ که خلاف فرض است

۲) اگر $AC < AB$ بنا به قضایای قبل در هر مثلث زاویه مقابل به ضلع بزرگتر از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر ، بزرگتر است لذا $\hat{B} < \hat{C}$ که این نیز خلاف فرض است .

بنا براین $AC > AB$

قضیه : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر ، بزرگتر است از زاویه ی مقابل به ضلع کوچکتر.

عکس قضیه : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر.

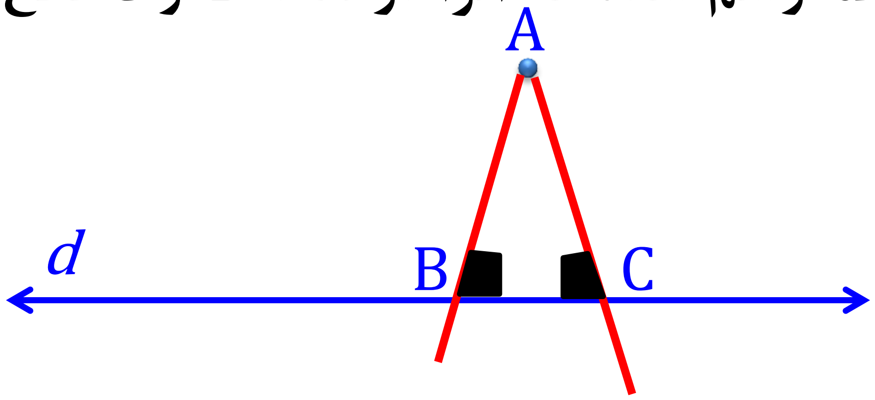
قضیه دو شرطی : در هر مثلث یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است . اگر و تنها اگر زاویه مقابل به ضلع بزرگتر ، بزرگتر از زاویه ی مقابل به ضلع کوچکتر باشد .

مثال : ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر ان خط وارد کرد.

فرض : نقطه ای مانند A غیر واقع بر خط d وجود دارد.

حکم : از نقطه A نمی توان بیش از یک عمود بر خط d وارد کرد.

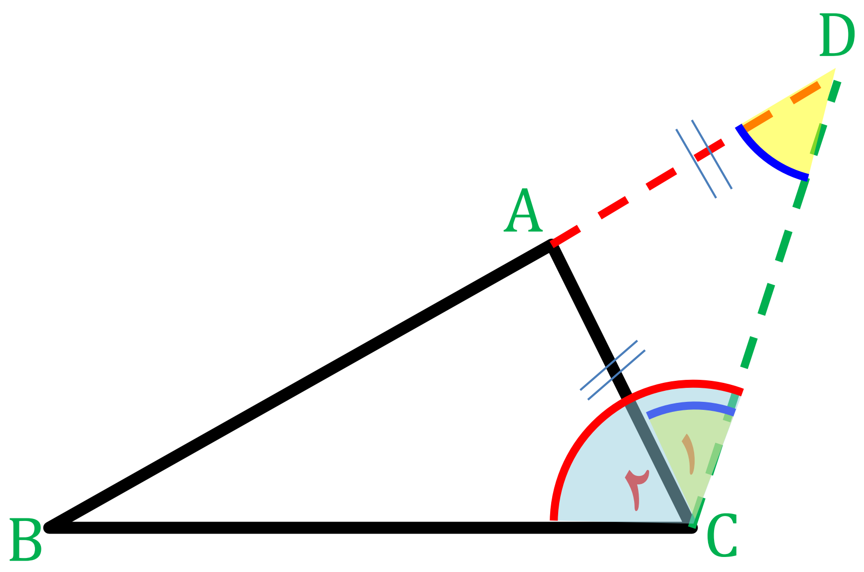
برهان خلف : فرض کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم شده که آنرا در نقاط B و C قطع کرده اند.



در این صورت مجموع زاویه های داخلی مثلث ABC بیش از ۱۸۰ درجه است که این غیر ممکن است . پس رسم دو عمود متمایز از یک نقطه بر یک خط غیر ممکن است.

قضیه نامساوی مثلث :

در هر مثلث مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.



فرض

$\triangle ABC$

حکم

۱) $AB + AC > BC$

۲) $AB + BC > AC$

۳) $AC + BC > AB$

اثبات : ضلع AB را از طرف A به اندازه ی AC امتداد می دهیم

$$\triangle ACD ;\ AD = AC \rightarrow \hat{D} = \hat{C}_{۱} \quad (۱)$$

$$\triangle DBC ;\ \hat{C} = \hat{C}_{۱} + \hat{C}_{۲} \rightarrow \hat{C} > \hat{C}_{۱} \xrightarrow{(۱)} \hat{C} > \hat{D} \quad (۲)$$

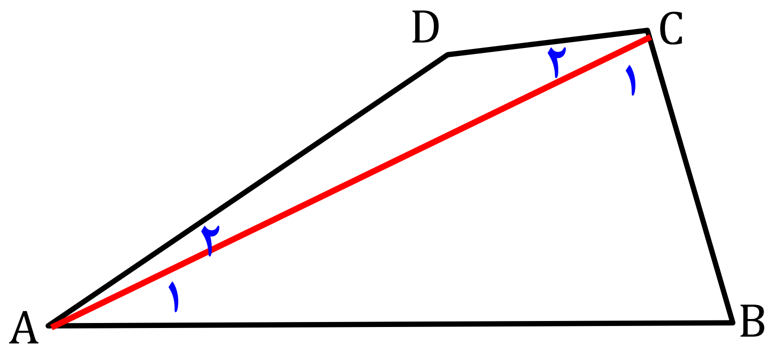
بنا به قضایای قبل می دانیم در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر پس

$$(۲) \rightarrow \triangle DBC \quad ;\hat{C} > \hat{D} \rightarrow BD > BC$$

$$\rightarrow AB + AD > BC \xrightarrow{(۱)} AB + AC > BC$$

یادآوری : هر چند ضلعی که تمام زاویه های داخلی آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشند را چند ضلعی محدب می نامند (ریاضی هفتم متوسطه اول)

مثال : در چهارضلعی محدب ABCD هیچ دو ضلع برابری وجود ندارد . اگر AB بزرگترین و CD کوچکترین ضلع آن باشد ثابت کنید : $\hat{A} < \hat{C}$



پاسخ : قطر AC را رسم می کنیم

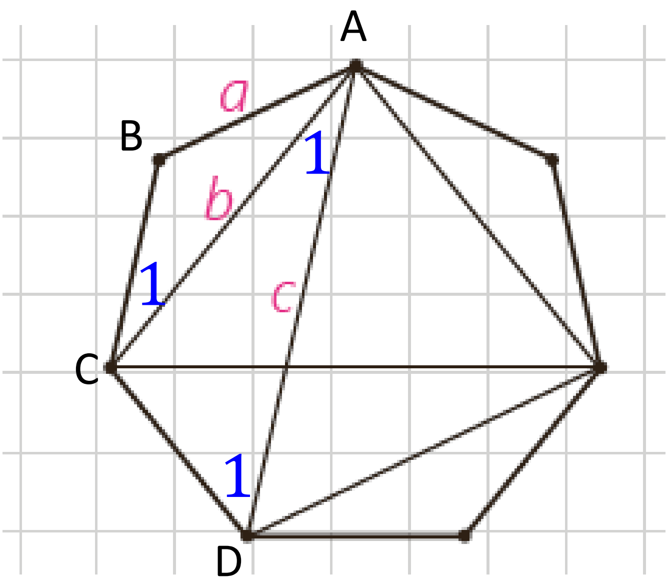
$$\Delta ABC: AB > BC \rightarrow \hat{C}_1 > \hat{A}_1$$

$$\Delta ABC: AD > CD \rightarrow \hat{C}_2 > \hat{A}_2$$

$$\rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \rightarrow \hat{C} > \hat{A}$$

کاردرکلاس

۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».



پاسخ : خیر – مثلث ACD متساوی الساقین نیست زیرا :

$$AC = b \ , AD = c \ , CD = a$$

$$\Delta ABC: \hat{B} > \widehat{C_1} \rightarrow b > a$$

$$\Delta ACD: \widehat{ACD} > \widehat{D_1} \rightarrow c > b$$

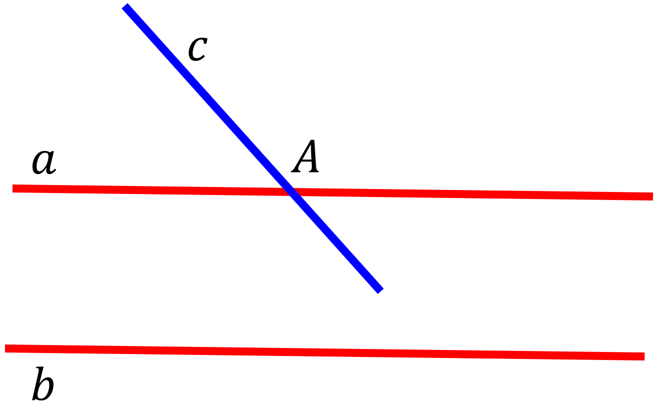
$$\rightarrow a \neq b \neq c$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۱ـ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

فرض : دو خط a,b موازی اند و خط c خط a را در نقطه A قطع می کند.



حکم : خط c خط b را نیز قطع می کند.

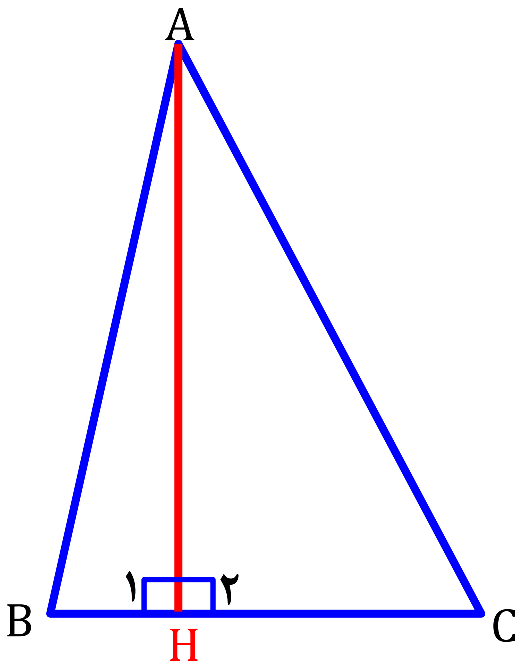
اثبات : فرض کنیم خط c خط b را قطع نمی کند. یعنی $b||c$ پس از نقطه A دو خط متمایز a و c می گذرند که هر دو با b موازی اند و این غیر ممکن است . لذا دو خط b و c متقاطع اند.

تمرین

۲ـ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

فرض : $AB \neq AC$

حکم : $\hat{B} \neq \hat{C}$



اثبات : فرض کنیم $\hat{B} = \hat{C}$ در این صورت ارتفاع
AH را رسم می کنیم.

$$\left.\begin{array}{r} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ AH = AH \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ACH \rightarrow AB = AC$$

که نتیجه اخیر با فرض قضیه تناقض دارد لذا $\hat{B} \neq \hat{C}$

تمرین

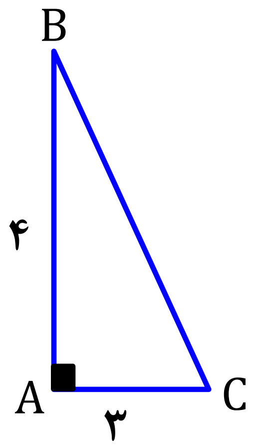
۳ـ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

الف : غلط

مثال نقض : $180° = 150° + 20° + 10°$ ولی $150° \not< 4 \times 10°$



ب : غلط

مثال نقض : مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ و ۵

تمرین

۴ـ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویهٔ قائمه وجود ندارد.

ت) همهٔ فلزات جامدند.

الف : چنین نیست که هر لوزی یک مربع باشد. $\equiv$ وجود دارد لوزیی که مربع نباشد.

ب : چنین نیست که مستطیلی وجود داشته باشد که مربع نباشد. $\equiv$ مستطیلی وجود ندارد که مربع نباشد.

پ : چنین نیست که مثلثی با دو زاویه ی قائمهٔ وجود ندارد. $\equiv$ مثلثی وجود دارد که دو زاویه ی آن قائمه اند .

ت : چنین نیست که همه ی فلزات جامد باشند. $\equiv$ فلزی وجود دارد که جامد نباشد.

۵ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

الف : در هر مثلث اگر دو زاویه مساوی باشند آنگاه اضلاع روبرو به آنها نیز مساوی اند.

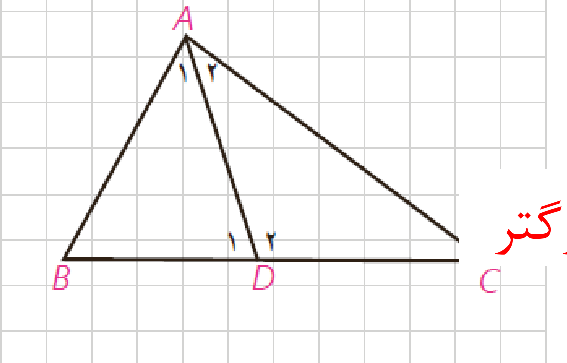
ب : اگر یک قطرهای یک چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.

پ : در هر مثلث اگر سه زاویه با هم برابر باشند آنگاه سه ضلع نیز با هم برابرند.

ت : اگر مساحت های دو دایره مساوی باشند . آنگاه شعاع هایشان نیز برابرند.

تمرین

۶ـ فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویهٔ A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجهٔ نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.



الف) $\hat{A}_1 > \hat{D}_2$ ، زیرا $\widehat{D}_2$ زاویه ی خارجی مثلث ABD است.

ب) $\hat{A}_2 > \hat{D}_2$ ، زیرا $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

پ) DC < AC، زیرا زیرا در مثلث ACD داریم $\widehat{D}_2 > \hat{A}_2$

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید : AB > BD

ث) حال نشان دهید : AB+AC > BC

نتیجه : در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع ازاندازهٔ ضلع سوم ، بزرگتر است.

ت :
$$\widehat{D}_1 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \widehat{D}_1 > \hat{A}_1 \rightarrow \Delta ABD: AB > BD$$

ث :
$$AB > BD\ , AC > CD \rightarrow \quad AB + AC > BD + CD \rightarrow AB + AC > BC$$

فکر کنید

عکس هریک از قضیه های زیر را بنویسید . در صورتی که عکس قضیه درست باشد . آن را ثابت کنید و در غیر این صورت به کمک مثال نقض آن را رد کنید.

الف : در هر مثلث متساوی الساقین ، طول نیمسازهای زاویه های داخلی متناظر ساق ها مساوی اند.

ب : در هر مثلث متساوی الساقین ، طول نیمسازهای زاویه های خارجی متناظر ساق ها مساوی اند.

۲

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد.
محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

نسبت و تناسب

نسبت : اگر a و b دو عدد حقیقی و مخالف صفر باشند کسر $\frac{a}{b}$ را یک **نسبت** می نامند.

تناسب : عبارت حاصل از تساوی دو نسبت را تناسب می نامند.

طرفین وسطین : در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، a,dرا طرفین و b,cرا وسطین می نامند زیرا

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\leftrightarrow a\div b=c\div d$$

a,dدر دو طرف تساوی و b,cدر وسط تساوی قرار دارند

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

ویژگی های تناسب

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$ طرفین وسطین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xleftrightarrow{\times bd} \frac{a}{b}bd = \frac{c}{d}bd \leftrightarrow ad = bc$$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ تعویض طرفین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc \leftrightarrow \frac{bc}{ab} = \frac{ad}{ab} \leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ تعویض وسطین

4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ معکوس کردن دو طرف

5. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ترکیب در صورت

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xleftrightarrow{+1} \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

6. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ تفصیل در صورت

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xleftrightarrow{-1} \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

7. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ترکیب در مخرج

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xleftrightarrow{+1} \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1 \leftrightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

8. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ تفصیل در مخرج

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xleftrightarrow{+1} 1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c} \leftrightarrow \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c} \leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

۹ـ اگر $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{e}{f}=k$ آنگاه $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

$$\frac{a}{b}=k\rightarrow a=kb$$
$$\frac{c}{d}=k\rightarrow c=kd$$
$$\frac{e}{f}=k\rightarrow e=kf$$

$$\rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{kb+kd+ke}{b+d+f}=\frac{k(b+d+f)}{b+d+f}=k$$

تعریف میانگین هندسی(واسطه هندسی) : عدد b را میانگین هندسی دو عدد a , c می نامند هرگاه $b^2 = ac$ یا $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۱۶ و ۹ را حساب کنید.

پاسخ :

$$b^2 = 9 \times 16 = 144 \to b = \pm 12$$

مثال ۱ : در تناسب زیرمقادیر x و y حساب کنید.

$$\frac{12}{x-1}=\frac{x+y}{24}=\frac{21}{28}$$

پاسخ :

$$\frac{12}{x-1}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}\rightarrow 3x-3=48\rightarrow 3x=51\rightarrow x=17$$

$$\frac{x+y}{24}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}\rightarrow\frac{17+y}{24}=\frac{3}{4}\rightarrow 68+4y=72$$

$$\rightarrow 4y=4\rightarrow y=1$$

مثال ۲ : اگر $\frac{12}{13} = \frac{2a+3b}{3a+2b}$ حاصل $\frac{(a-2b)^2+(2a+b)^2}{(a+b)^2+ab}$ را بدست آورید

پاسخ :

$$\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{12}{13} \rightarrow 26a + 39b = 36a + 24b$$

$$\rightarrow 39b - 24b = 36a - 26a$$

$$\rightarrow 15b = 10a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{15}{10}$$

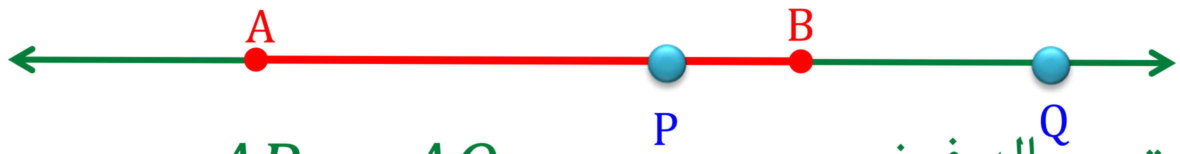
$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 3t\,, b = 2t$$

$$\frac{(a-2b)^2+(2a+b)^2}{(a+b)^2+ab} = \frac{(3t-4t)^2+(6t+2t)^2}{(3t+2t)^2+(3t)(2t)}$$

$$= \frac{t^2+64t^2}{25t^2+6t^2} = \frac{65t^2}{31t^2} = \frac{65}{31}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال ۳ : یکی از دو نقطه P و Q بر پاره خط مفروض AB به طول a و دیگری بر امتداد پاره خط AB چنان قرار دارند که نسبت فاصله های آنها از A و B برابر b باشد . فاصله ی این دو نقطه را بر حسب a و b حساب کنید .



پاسخ : بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنیم نقطه B بین نقاط P و Q باشد

$$AB = a \ , \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = b$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{b}{1} \rightarrow \frac{AP + PB}{PB} = \frac{b+1}{1} \rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{b+1}{1} \rightarrow \frac{a}{PB} = \frac{b+1}{1}$$

$$\rightarrow PB = \frac{a}{b+1}$$

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{b}{1} \rightarrow \frac{AQ - QB}{QB} = \frac{b-1}{1} \rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{b-1}{1} \rightarrow QB = \frac{a}{b-1}$$

$$\rightarrow PQ = PB + BQ = \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b-1} = \frac{2ab}{b^2 - 1}$$

مثال ۴ : اگر $a+b+c=8$ مقدار $ab+ac$ را با توجه به تناسب زیر حساب کنید.

$$\frac{a+b}{c+8}=\frac{b+2c+1}{b+11}=\frac{a+10}{a+18}$$

پاسخ:

$$\frac{a+b}{c+8}=\frac{b+2c+1}{b+11}=\frac{a+10}{a+18}=k$$

$$\rightarrow k=\frac{a+b+b+2c+1+a+10}{c+8+b+11+a+18}=\frac{2a+2b+2c+11}{a+b+c+37}$$

$$\rightarrow k=\frac{2(a+b+c)+11}{a+b+c+37}\rightarrow k=\frac{2(8)+11}{8+37}=\frac{27}{45}=\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \frac{a+10}{a+18}=\frac{3}{5}\rightarrow 5a+50=3a+54\rightarrow 2a=4\rightarrow \boxed{a=2}$$

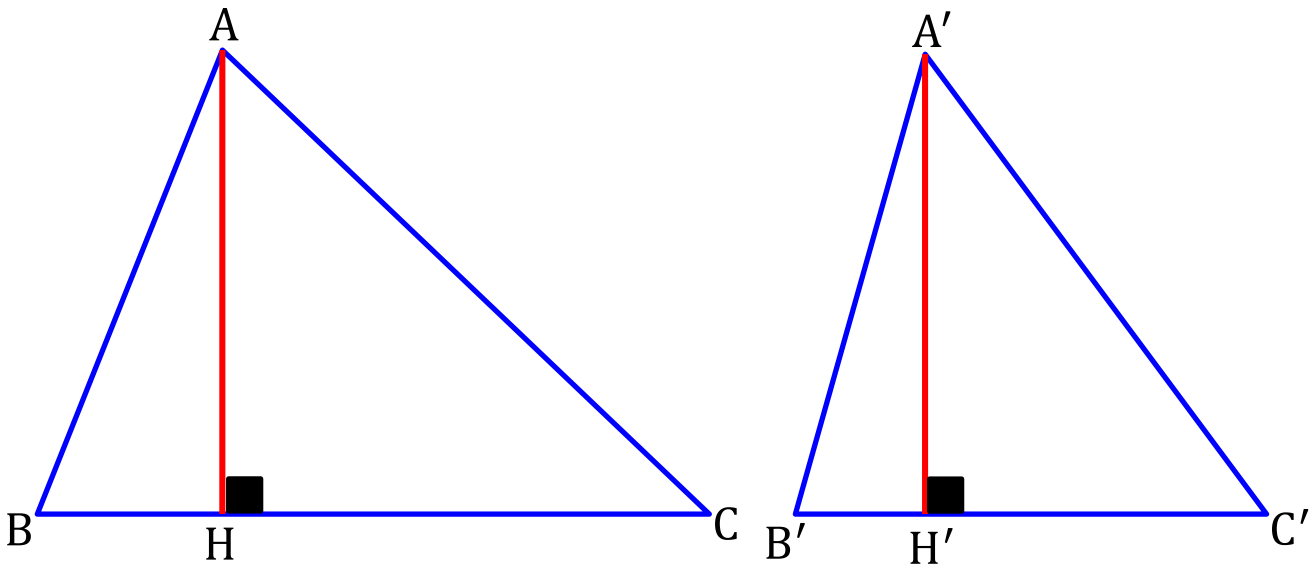
$$\rightarrow 2+b+c=8\rightarrow b+c=6$$

$$\rightarrow ab+ac=a(b+c)=2\times 6=12$$

مثال۵ : اگر $AH, A'H'$ ارتفاع های وارد بر اضلاع $BC, B'C'$ از مثلث های

$ABC, A'B'C'$ باشند و $AH = A'H'$ ثابت کنید : $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$

پاسخ :



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} AH \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه ۱

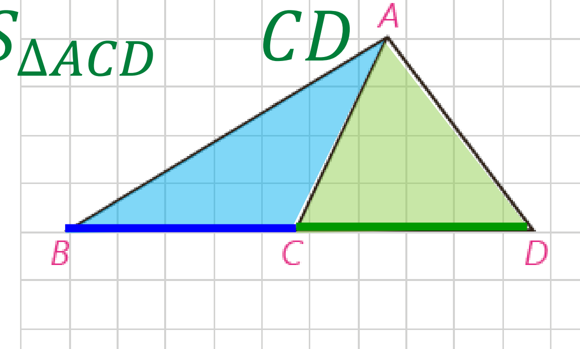
هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

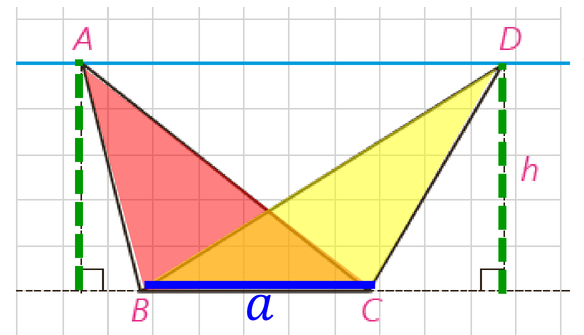
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}a\times h}{\frac{1}{2}a\times h}=1$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۱ـ اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

پاسخ :

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5}\rightarrow\frac{x+y+z}{2+3+6}=\frac{3}{5}\rightarrow\frac{x+y+z}{11}=\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow x+y+z=\frac{11\times 3}{5}=\frac{33}{5}$$

تمرین

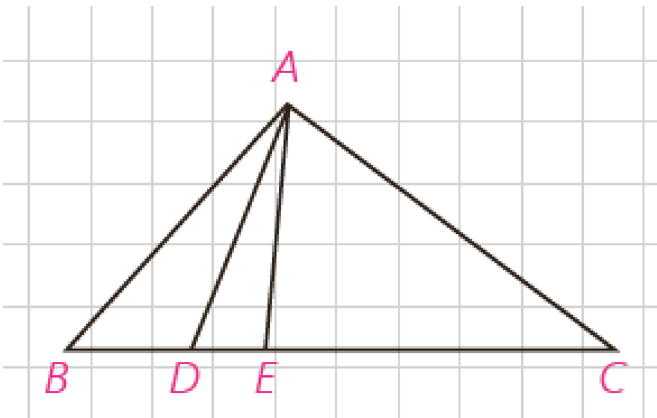
۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

پاسخ :

$$b^2 = 10 \times 8 = 80 \to b = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

تمرین

۳ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



پاسخ : فرض کنیم: $S_{\Delta ACE} = a$

$$\rightarrow S_{\Delta ADE} = \frac{a}{3} \; , S_{\Delta ABD} = \frac{a}{2}$$

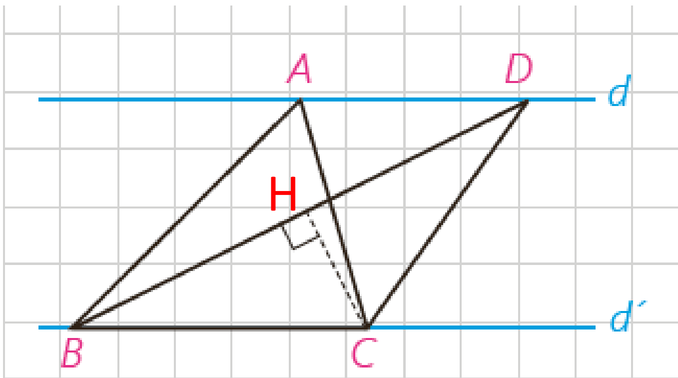
$$\rightarrow S_{\Delta ABC} = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{2} = \frac{11}{6}a$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\frac{11a}{6}}{\frac{a}{3}} = \frac{33a}{6a} = \frac{11}{2}$$

تمرین

۴ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، ۸cm² است. اگر BD=۶cm باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.



پاسخ :

$$d \parallel d' \rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} = 8\ cm^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} CH \times BD = 8 \rightarrow \frac{1}{2} CH \times 6 = 8$$

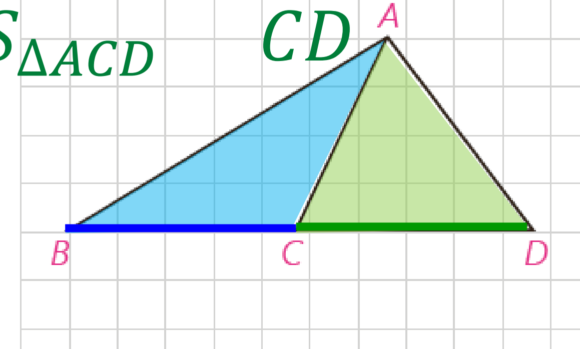
$$\rightarrow 3CH = 8 \rightarrow CH = \frac{8}{3}$$

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

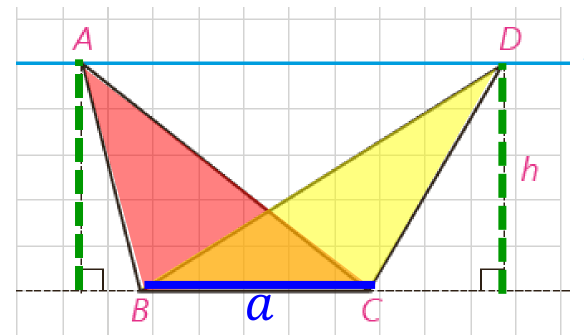
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



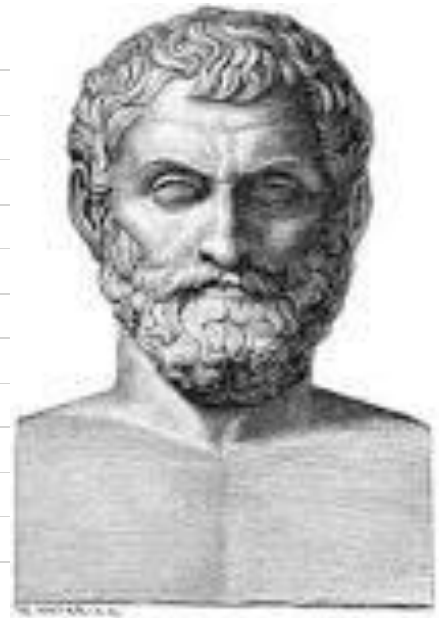
نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}a\times h}{\frac{1}{2}a\times h}=1$$

درس دوم

قضیهٔ تالس



تالِس یا طالِس یا با لهجه یونانی تالیس؛ فیلسوف مکتب مَلَطی بود که در نیمه دوم سده ششم پیش از میلاد می‌زیست. از او به عنوان آغازگر فلسفه و نخستین چهره علم یاد می‌شود. یونانیان او را در شمار حکمای سبعه آورده‌اند.

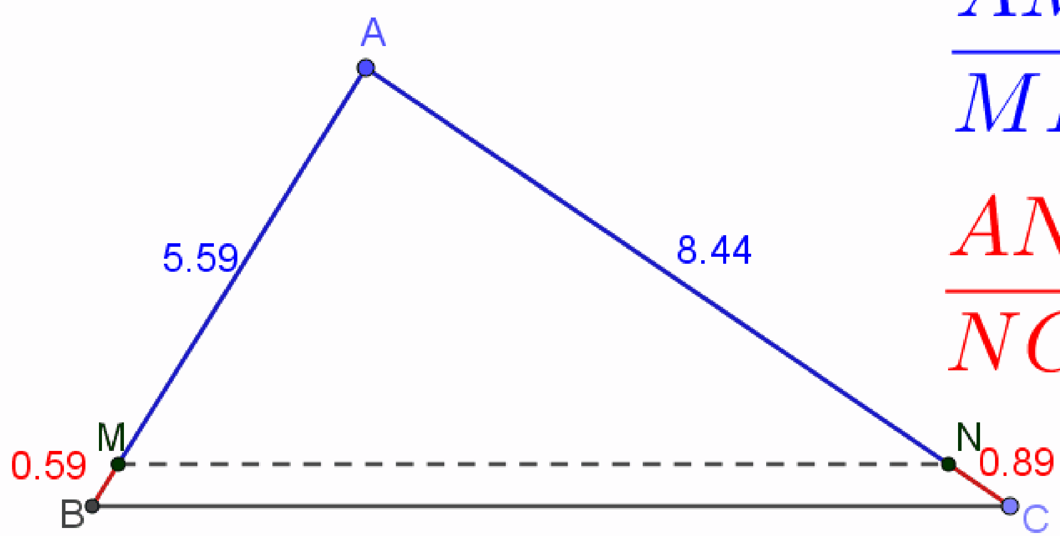
تاریخ تولد: ق.م. ۶۲۴، ملطِ، ترکیه

تاریخ مرگ: ق.م. ۵۴۶، ملطِ، ترکیه

ملیت: یونانی

نام کامل: Thales

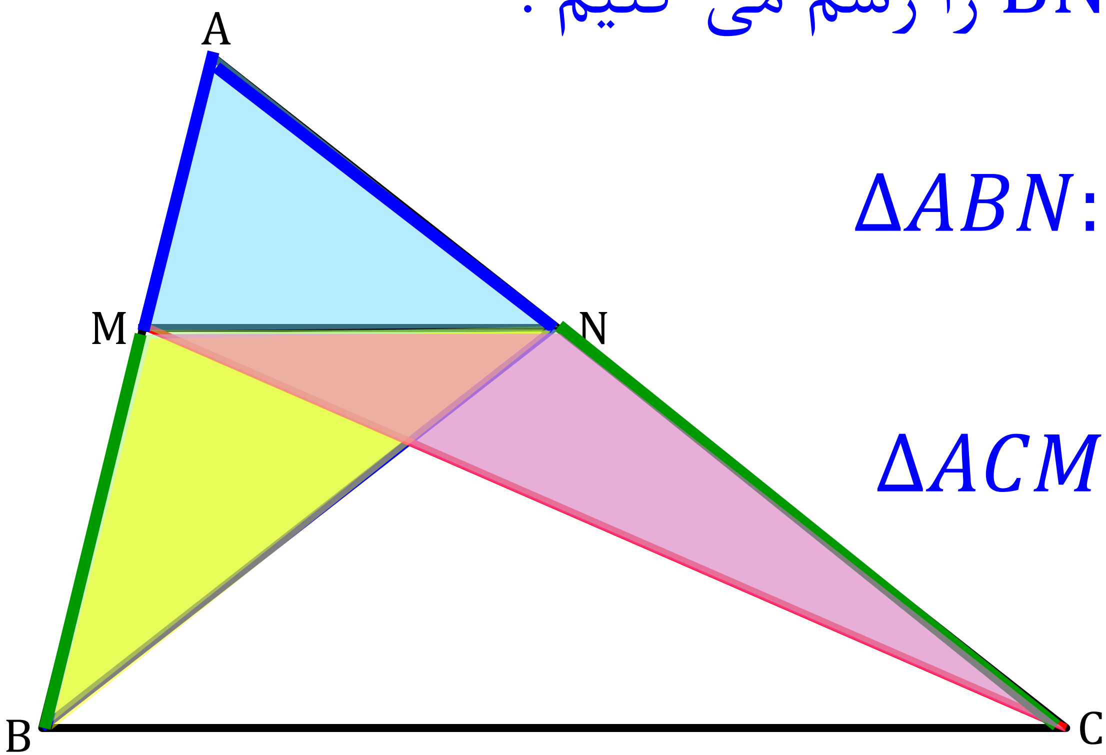
قضیه تالس: اگر خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع کند و با BC موازی باشد . آنگاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$



$$\frac{AM}{MB}=\frac{5.59}{0.59}=9.48$$

$$\frac{AN}{NC}=\frac{8.44}{0.89}=9.48$$

اثبات : پاره خط های CM و BN را رسم می کنیم :



$$\Delta ABN: \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNB}} = \frac{AM}{MB} \qquad (1)$$

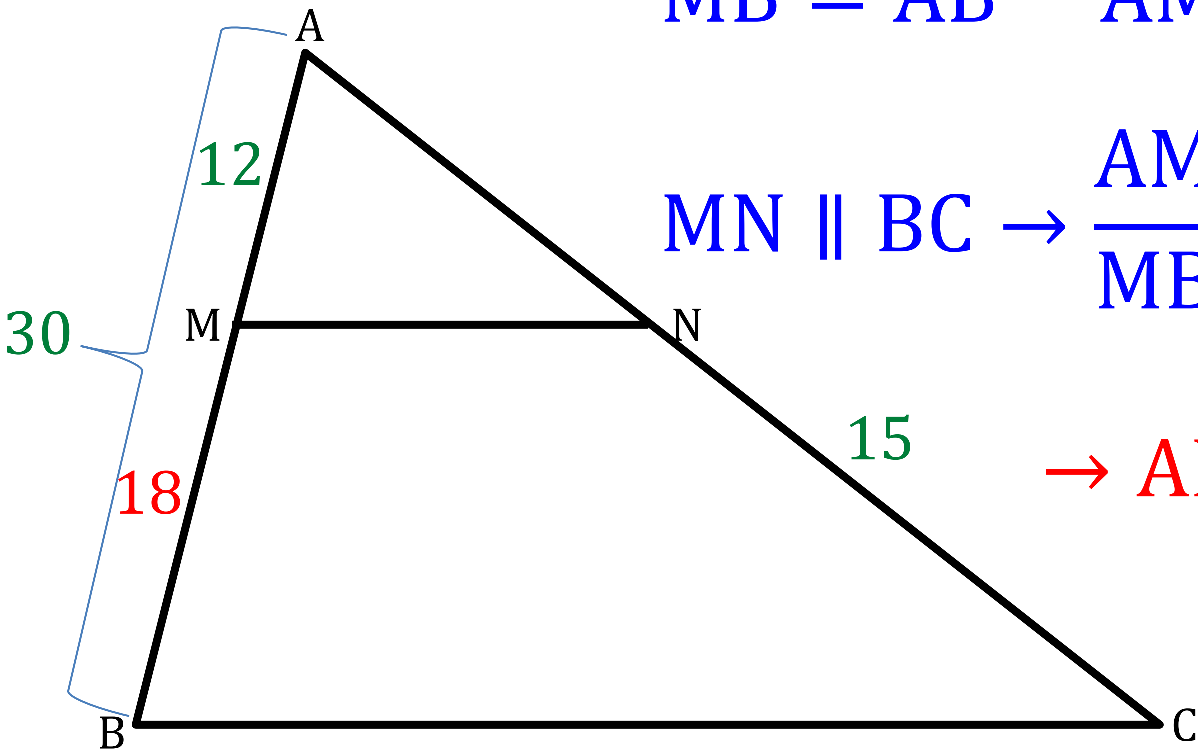
$$\Delta ACM: \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{AN}{NC} \qquad (2)$$

$$MN \parallel BC \rightarrow S_{\Delta MNB} = S_{\Delta MNC} \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}$$

مثال ۱: در مثلث ΔABC شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $AM = 12$ و $AB = 30$ و $CN = 15$ طول پاره خط AN را حساب کنید.

پاسخ :



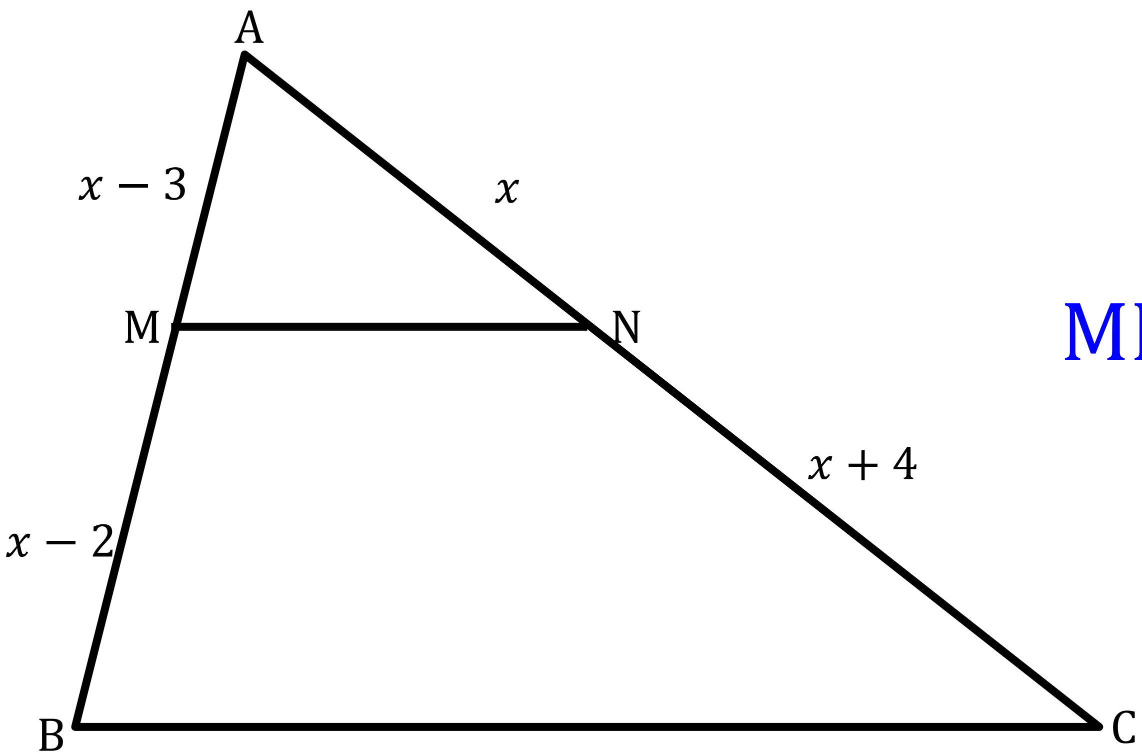
$$MB = AB - AM = 30 - 12 = 18$$

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow \frac{12}{18} = \frac{AN}{15}$$

$$\rightarrow AN = \frac{12 \times 15}{18} = 10$$

مثال ۲ :در مثلث ΔABC شکل مقابل $MN \parallel BC$ مطلوب است محاسبه مقدار x

پاسخ :



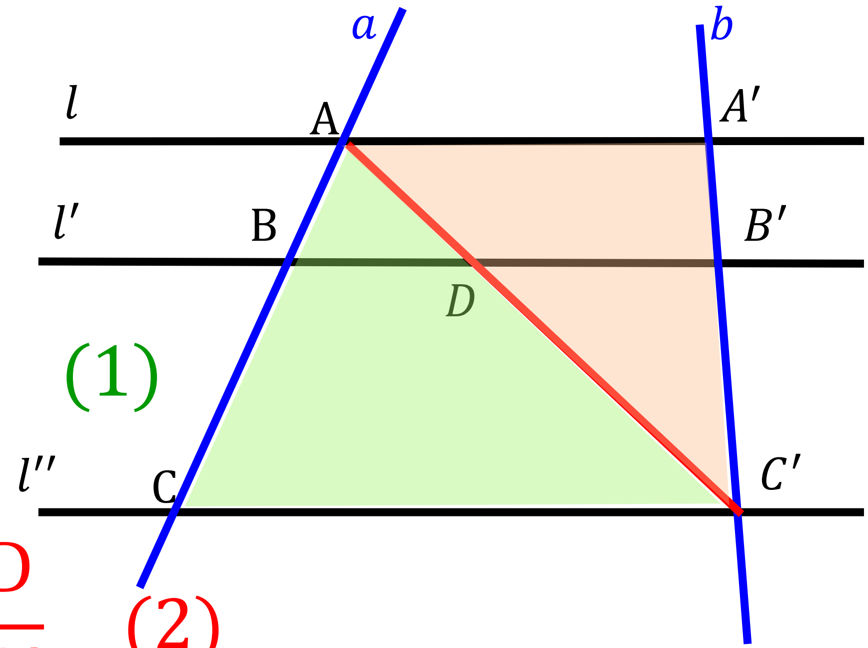
$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC} \rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}$$

$$\rightarrow \frac{x-3}{x-2} = \frac{x}{x+4}$$

$$\rightarrow (x-3)(x+4) = x(x-2)$$

$$\rightarrow x^2 + x - 12 = x^2 - 2x \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$$

مثال ۳ : سه خط l, l', l'' دو به دو موازی اند . اگر خط a این سه خط را به ترتیب در نقاط A, B, C و خط b نیز به ترتیب آنها را در نقاط A', B', C' قطع کند. ثابت کنید : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$



اثبات : پاره خط AC' را رسم نموده تا l' را در نقطه D قطع کند.

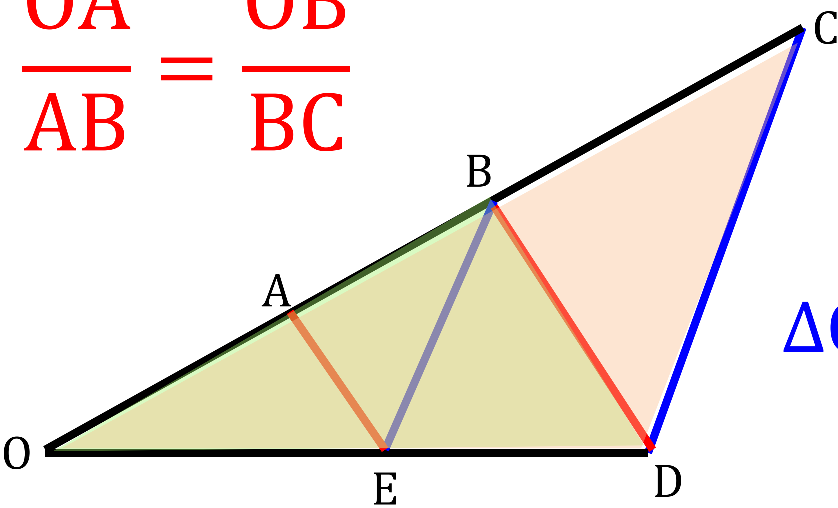
$$\Delta ACC' : BD \parallel CC' \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC'} \quad (1)$$

$$\Delta AA'C : AA' \parallel B'D \rightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AD}{DC'} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \xRightarrow{\text{تعویض وسطین}} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

مثال ۴ : در شکل مقابل $AE \parallel BD$ و $BE \parallel CD$ ثابت کنید :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BC}$$



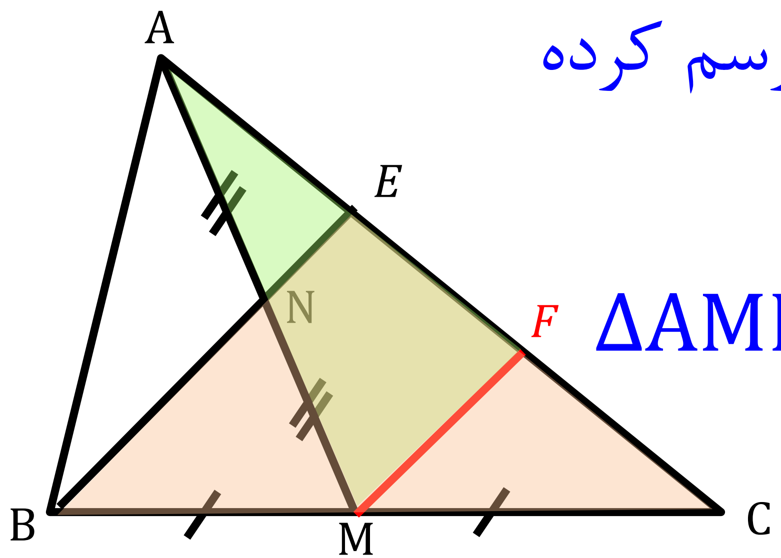
اثبات :

$$\Delta OBD: BD \parallel AE \rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OE}{ED} \quad (1)$$

$$\Delta OCD: BE \parallel CD \rightarrow \frac{OB}{BC} = \frac{OE}{ED} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BC}$$

مثال ۵ : در مثلث ΔABC شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است .
از رأس B خطی را چنان رسم می کنیم که میانه AM را در نقطه N نصف کرده و ضلع AC را در E کند. مطلوب است محاسبه $\dfrac{AE}{EC}$



پاسخ : از نقطه M خطی موازی BE رسم کرده تا AC را در F قطع کند :

$$\Delta AMF: EN \parallel FM \rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AN}{NM} = 1$$

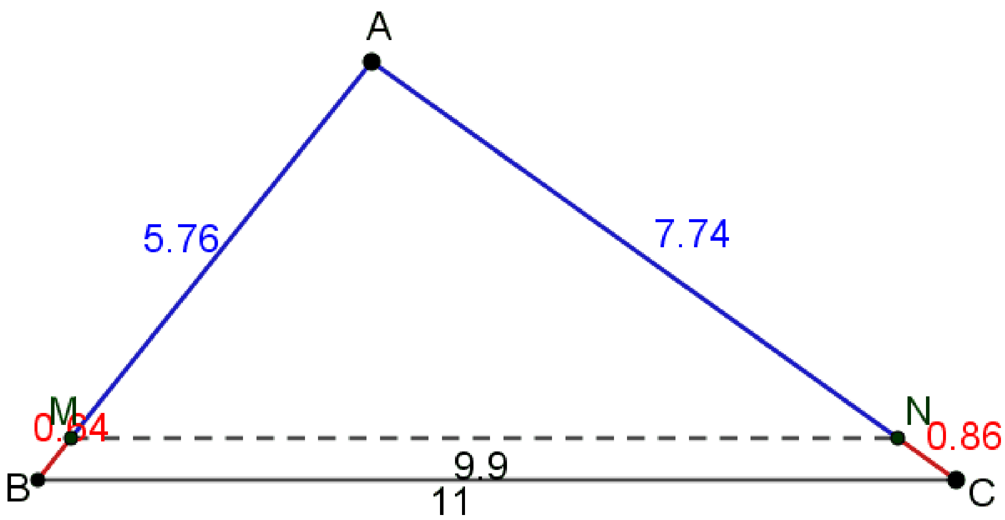
$$\rightarrow AE = EF \quad (1)$$

$$\Delta BCE: BE \parallel FM \rightarrow \frac{EF}{FC} = \frac{BM}{MC} = 1 \rightarrow EF = FC \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow AE = EF = FC \rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$$

تعمیم قضیه تالس: اگر خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع کند و با BC موازی باشد .

آنگاه $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



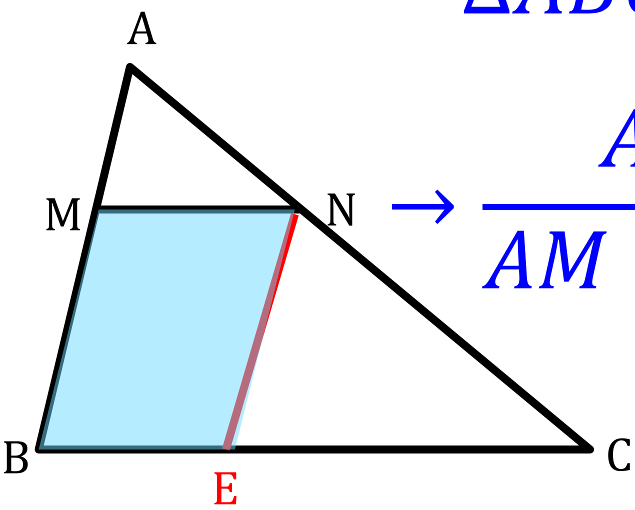
$$\frac{AM}{AB} = \frac{5.76}{6.4} = 0.9$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{7.74}{8.6} = 0.9$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{9.9}{11} = 0.9$$

اثبات :

$$\Delta ABC: MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



$$\rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{AN}{AN+NC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (1)$$

از نقطه N خطی موازی AB رسم نموده تا BC را در نقطه E قطع کند.

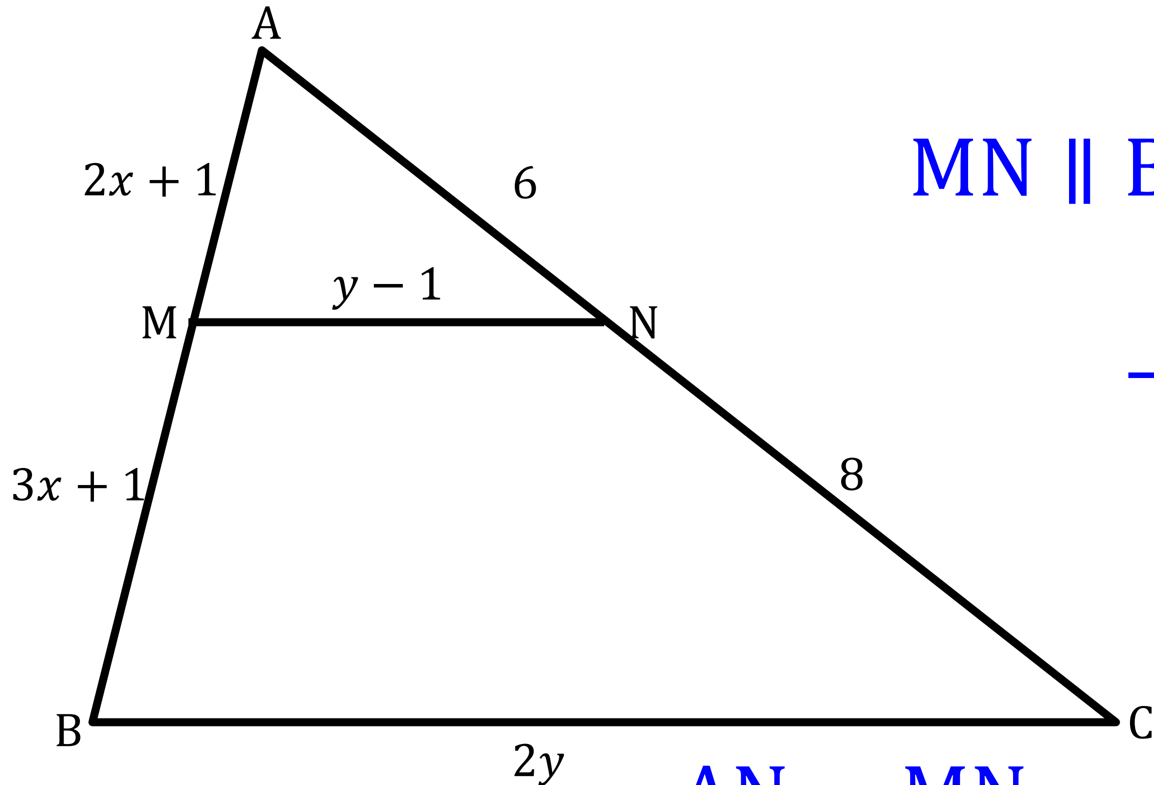
چهار ضلعی MNEB متوازی الاضلاع است . پس $\mathrm{MN} = \mathrm{BE} \quad (2)$

$$\Delta ABC: EN \parallel AB \rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{BE}{EC}$$

$$\rightarrow \frac{AN}{AN+NC} = \frac{BE}{BE+EC} \rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{BE}{BC} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

مثال ۱ :در مثلث ΔABC شکل مقابل $MN \parallel BC$ مطلوب است محاسبه مقادیر y و x



پاسخ :

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\rightarrow \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{6}{8}$$

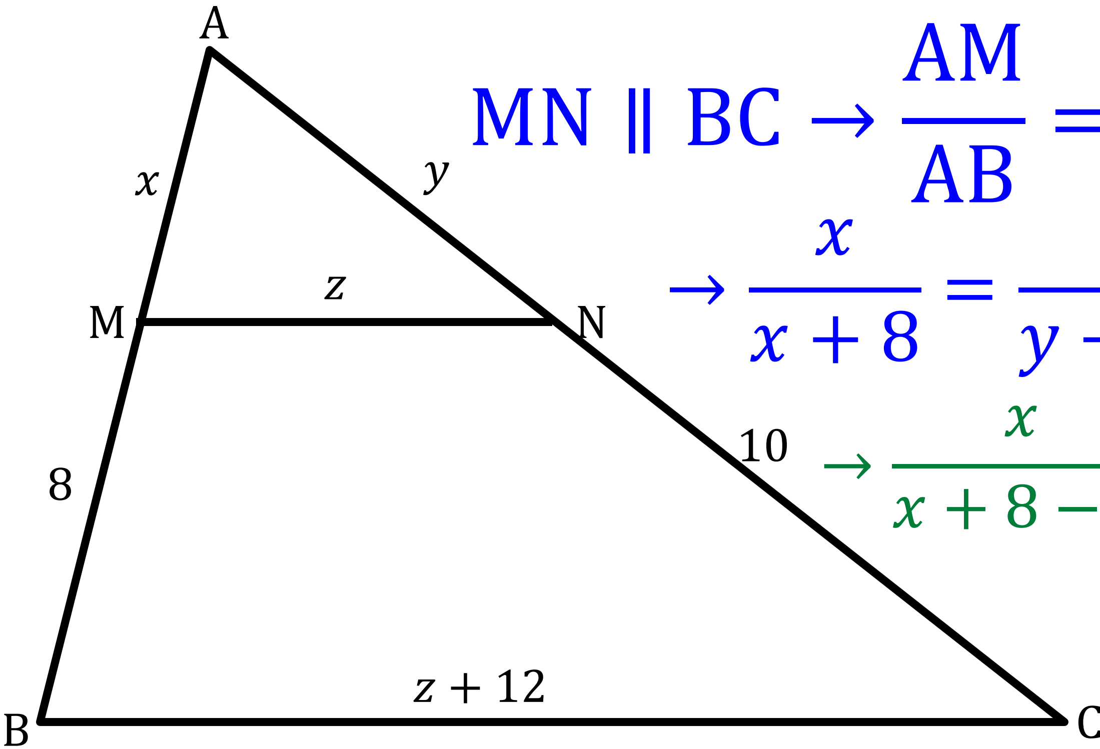
$$18x + 6 = 16x + 8$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{6}{14} = \frac{y-1}{2y}$$

$$12y = 14y - 14 \rightarrow -2y = -14 \rightarrow y = 7$$

مثال ۲ : در مثلث ΔABC شکل مقابل $MN \parallel BC$ است . اگر محیط مثلث AMN مساوی ۱۵ باشد. مقادیر z و y و x را حساب کنید.



$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{y}{y+10} = \frac{z}{z+12}$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+8-x} = \frac{y}{y+10-y} = \frac{z}{z+12-z}$$

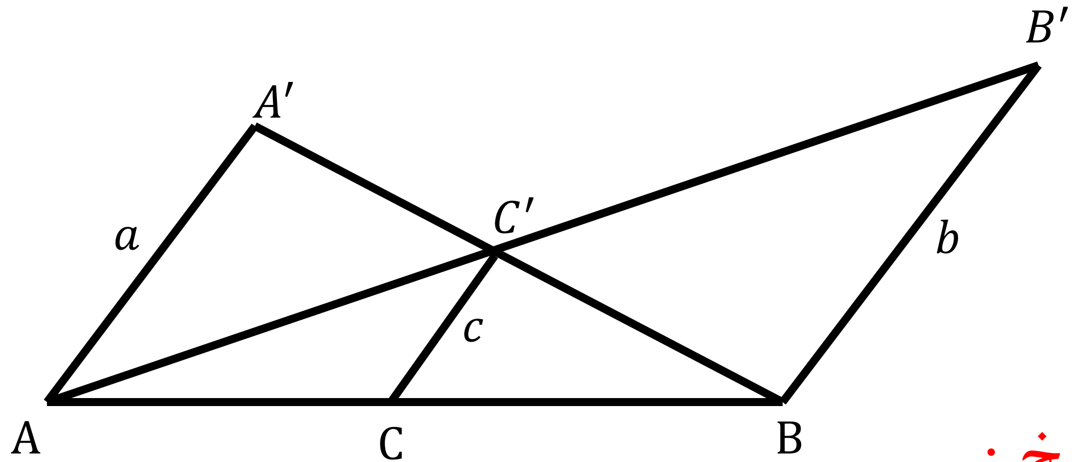
$$\rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{12} = k$$

$$\rightarrow k = \frac{x+y+z}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = 4\,, y = 5\,, z = 6$$

مثال ۳ : در شکل مقابل $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ ثابت کنید :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$



پاسخ :

$$\Delta ABA' : AA' \parallel CC' \rightarrow \frac{CC'}{AA'}=\frac{BC}{AB} \qquad (1)$$

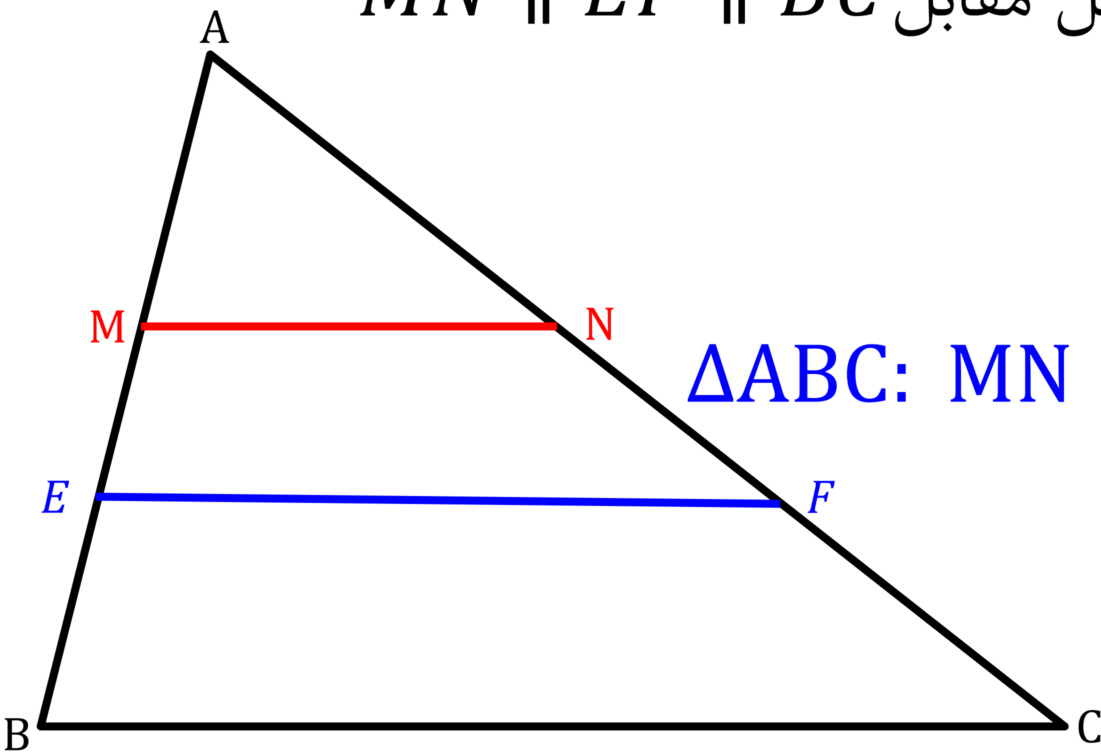
$$\Delta ABB' : BB' \parallel CC' \rightarrow \frac{CC'}{BB'}=\frac{AC}{AB} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \frac{CC'}{BB'}+\frac{CC'}{AA'}=\frac{BC}{AB}+\frac{AC}{AB} \rightarrow \frac{CC'}{BB'}+\frac{CC'}{AA'}=\frac{AB}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{c}{b}+\frac{c}{a}=1 \xRightarrow{\div c} \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$$

مثال ۴ :در مثلث ΔABC شکل مقابل $MN \parallel EF \parallel BC$

ثابت کنید : $\frac{EM}{AB}=\frac{FN}{AC}$



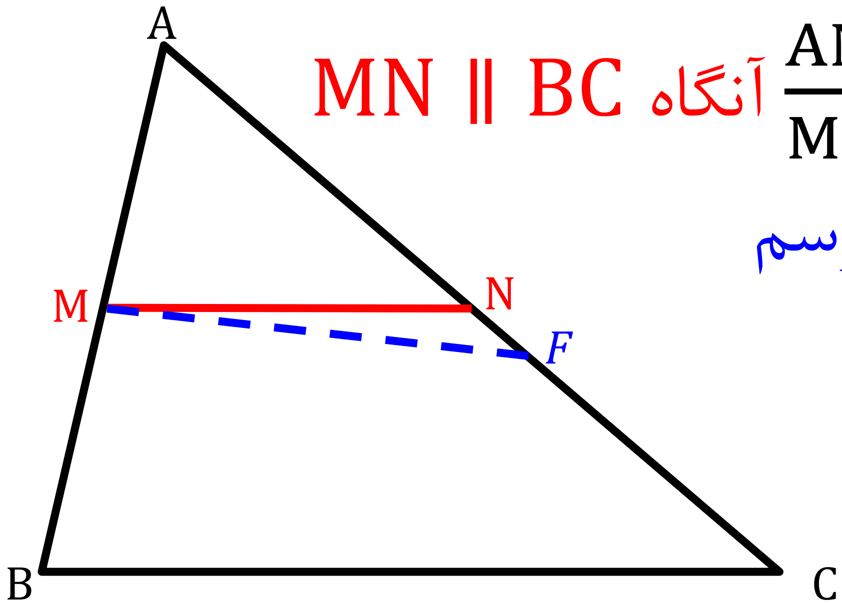
پاسخ :

$$\Delta ABC:\ MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \quad (1)$$

$$\Delta ABC: EF \parallel BC \rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \frac{AE}{AB}-\frac{AM}{AB}=\frac{AF}{AC}-\frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{EM}{AB}=\frac{FN}{AC}$$

عکس قضیه تالس: اگر خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع کند و $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}$ آنگاه MN ∥ BC



اثبات : از نقطه M خطی موازی BC رسم نموده تا AC را در نقطه F قطع کند .

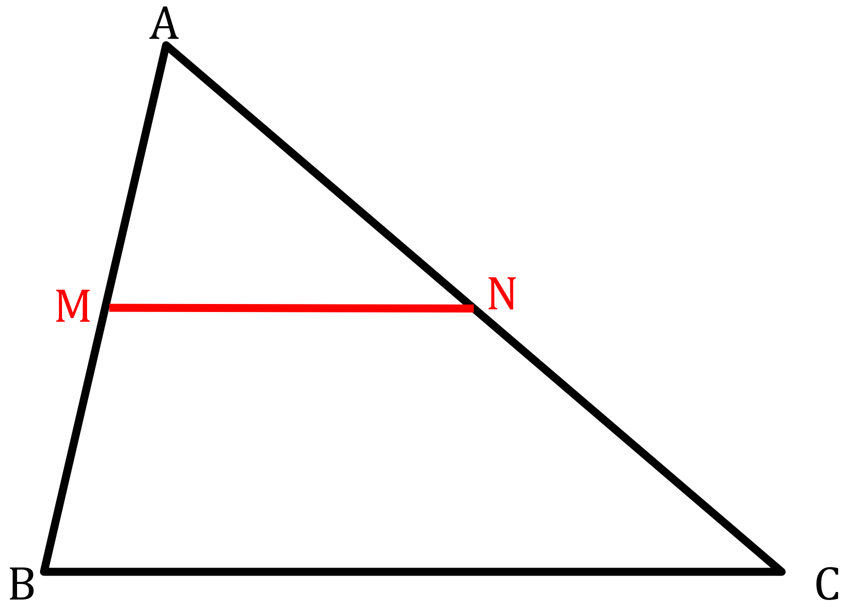
باید نشان دهیم که نقاط N, F یکی هستند.

$$\Delta \mathrm{ABC}: \mathrm{MF} \parallel \mathrm{BC} \rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} \quad (1)$$

فرض: $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}} \rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{AM + \mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AN} + \mathrm{NC}} \rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} \quad (2)$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} \rightarrow AN = AF$$

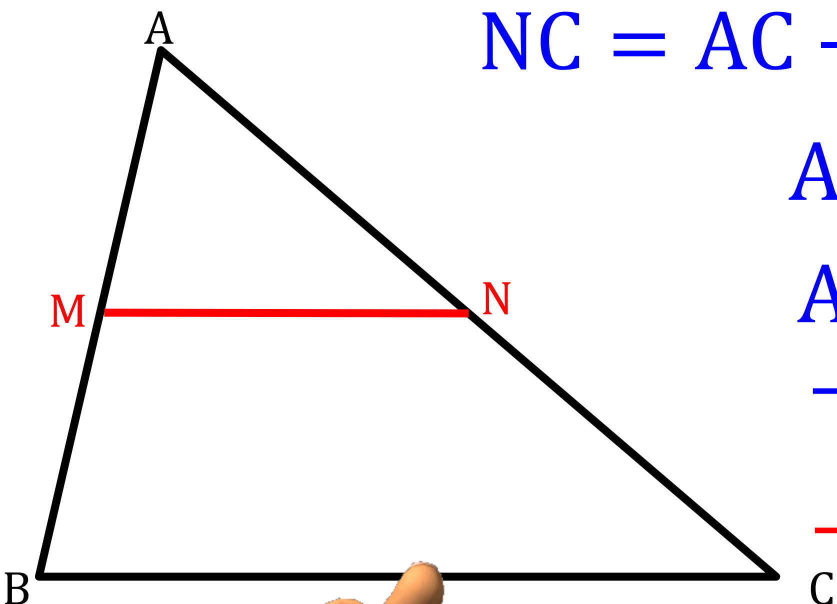
پس نقاط N, F بر هم منطبق اند . لذا MN ∥ BC



نتیجه : اگر خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع کند و $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ آنگاه $MN \parallel BC$

مثال ۱ : در شکل مقابل خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع می کند با توجه به مقادیر داده شده بررسی کنید آیا BC, MN موازی اند یا خیر .

الف : $AM = 8, MB = 10, AN = 12, AC = 27$



پاسخ :

$$\mathrm{NC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AN} = 27 - 12 = 15$$

$$\mathrm{AM} \times \mathrm{NC} = 8 \times 15 = 120$$

$$\mathrm{AN} \times \mathrm{MB} = 12 \times 10 = 120$$

$$\rightarrow \mathrm{AM} \times \mathrm{NC} = \mathrm{AN} \times \mathrm{MB}$$

$$\rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow MN \parallel BC$$

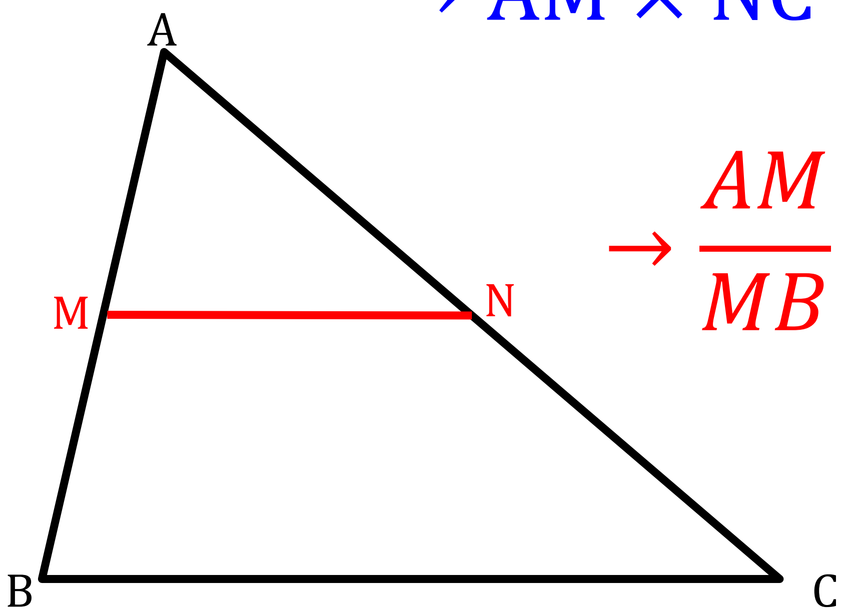
ب : $AM = 1+\sqrt{3}\,,MB = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}AN = 2\sqrt{3},NC = 6\sqrt{2}$

پاسخ :

$$\mathrm{AM}\times\mathrm{NC} = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}+6\sqrt{6}$$

$$\mathrm{AN}\times\mathrm{MB} = 2\sqrt{3}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = 6\sqrt{6}+2\sqrt{12} = 6\sqrt{6}+6\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \mathrm{AM}\times\mathrm{NC} = \mathrm{AN}\times\mathrm{MB}$$



$$\rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow MN \parallel BC$$

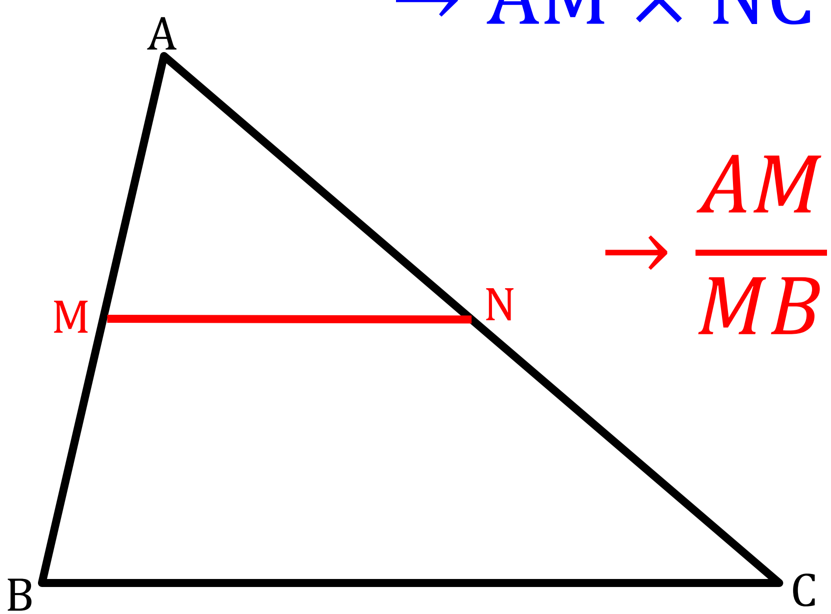
ج : $AM = 2+\sqrt{3}\,, MB = 3\sqrt{2}\,, AN = 2\sqrt{3}, NC = 2-\sqrt{3}$

پاسخ :

$$\mathrm{AM} \times \mathrm{NC} = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 4-3 = 1$$

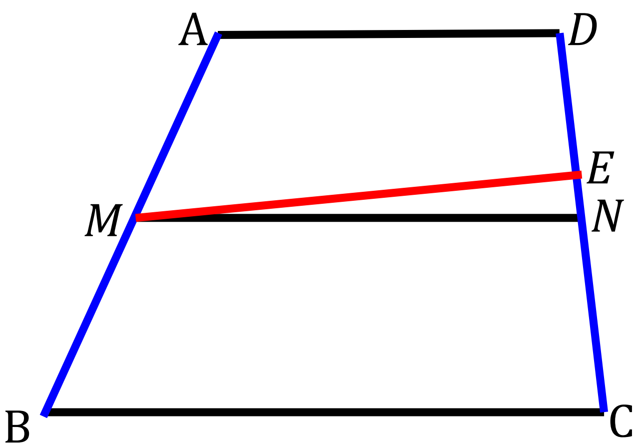
$$\mathrm{AN} \times \mathrm{MB} = \left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \mathrm{AM} \times \mathrm{NC} \neq \mathrm{AN} \times \mathrm{MB}$$



$$\rightarrow \frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC} \rightarrow MN \nparallel BC$$

مثال۲ : در شکل مقابل خطی وسط ساق های CD و AB از ذوزنقه ABCD را در نقاط M ,N نصف می کند. ثابت کنید MN با دو قاعده ذوزنقه موازی است.



پاسخ : از نقطه M خطی موازی دو قاعده رسم نموده تا CD را در E قطع کند.

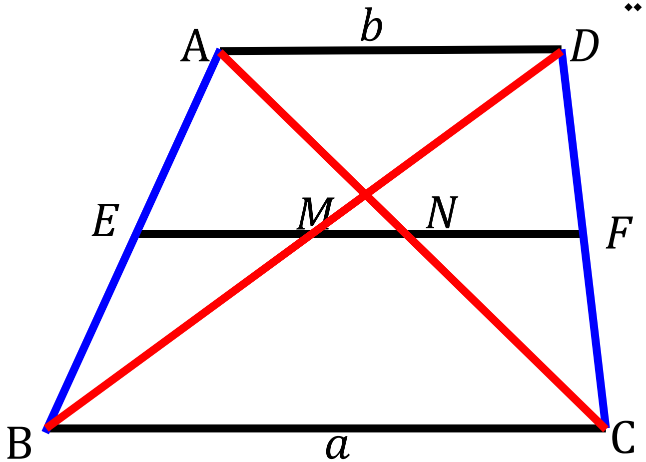
باید ثابت کنیم نقطه E روی نقطه N قرار دارد.

$$AD \parallel ME \parallel BC \rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{AM}{MB} = 1 \rightarrow DE = EC$$

از طرف دیگر بنا به فرض $DN = NC$ پس نقطه E روی نقطه N قرار دارد. لذا $AD \parallel MN \parallel BC$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال۳ : در شکل مقابل خطی از وسط ساق های CD و ABذوزنقه ABCD گذشته وقطرهایش را در نقاط M ,N قطع می کند.
طول پاره خط MN را بر حسب a,b حساب کنید .



پاسخ : نقاط E ,F وسط ساق های CD و AB هستند پس : $EF \parallel AD \parallel BC$

$$\Delta ABC : EN \parallel BC \to \frac{AE}{AB} = \frac{EN}{BC} = \frac{1}{2} \to EN = \frac{a}{2}$$

$$\Delta ABD : EM \parallel AD \to \frac{BE}{AB} = \frac{EM}{AD} = \frac{1}{2} \to EM = \frac{b}{2}$$

$$MN = EN - EM = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \to MN = \frac{a-b}{2}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۱ــ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$ غلط

ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ درست

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ درست

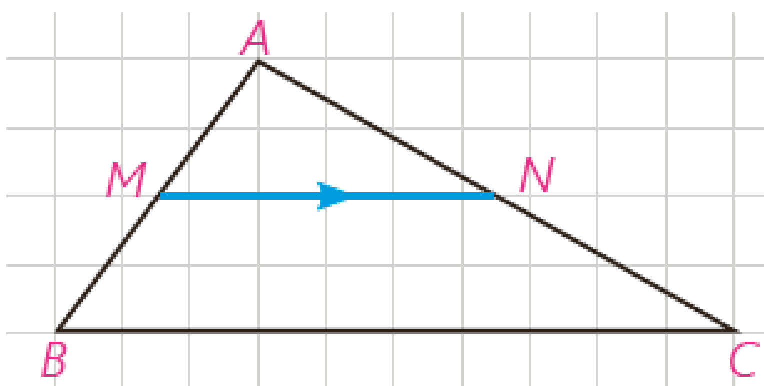
ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$ غلط

ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{CA}=\frac{MN}{BC}$ غلط

ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$ درست

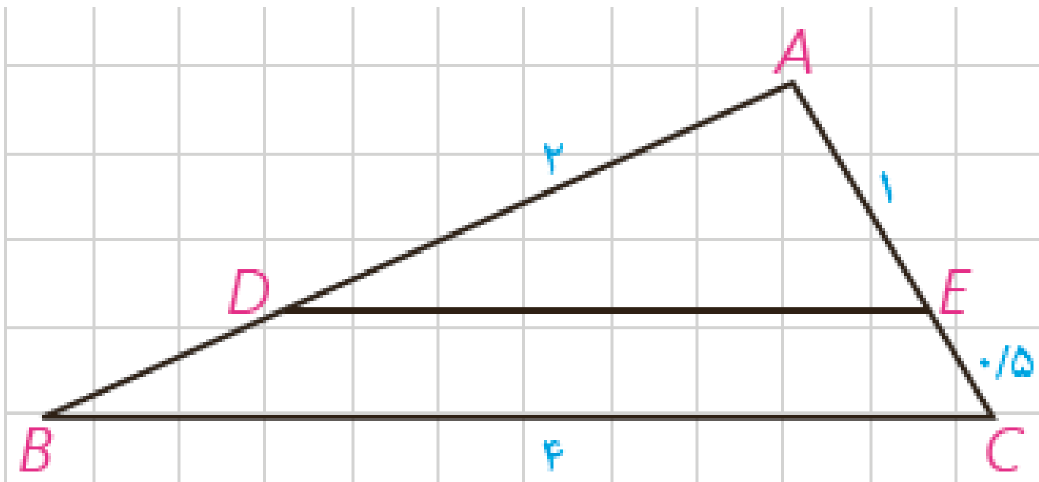
چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ درست

ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$ غلط



تمرین

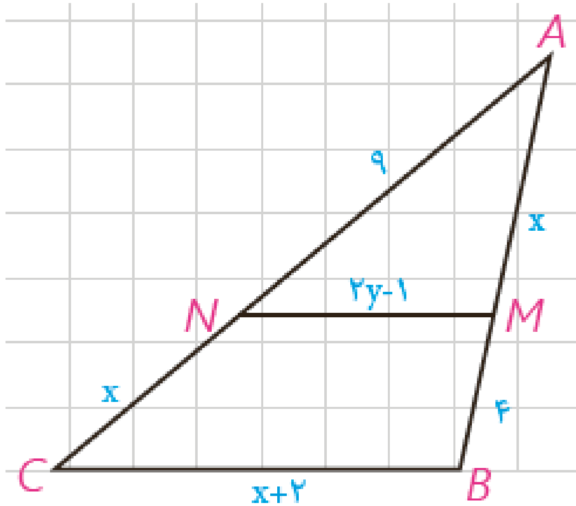
۲ــ در شکل مقابل DE||BC؛ باتوجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



$$\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC} \to \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \to \frac{2}{\mathrm{BD}} = \frac{1}{0.5} \to BD = 1$$

$$\to AB = 2 + 1 = 3$$

$$\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC} \to \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}} \to \frac{2}{3} = \frac{\mathrm{DE}}{4} \to DE = \frac{8}{3}$$



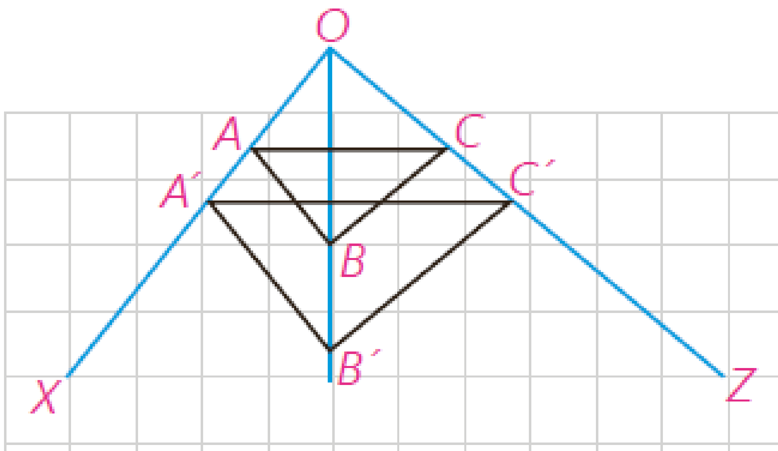
۳ـ در شکل مقابل MN||BC؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$$

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \rightarrow$$

$$30y - 15 = 72 \rightarrow 30y = 87 \rightarrow y = \frac{87}{30} = \frac{29}{10} = 2.9$$

۴ـ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



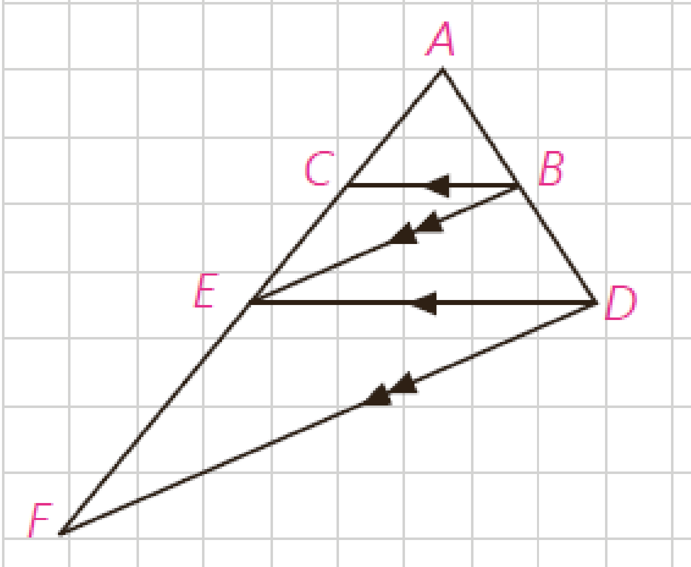
$$OA'B': AB \parallel A'B' \rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\Delta OB'C': BC \parallel B'C' \rightarrow \frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\rightarrow \frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA'} \rightarrow AC \parallel A'C'$$

تمرین

۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم BC||DE و BE||DF، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^۲ = AC . AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



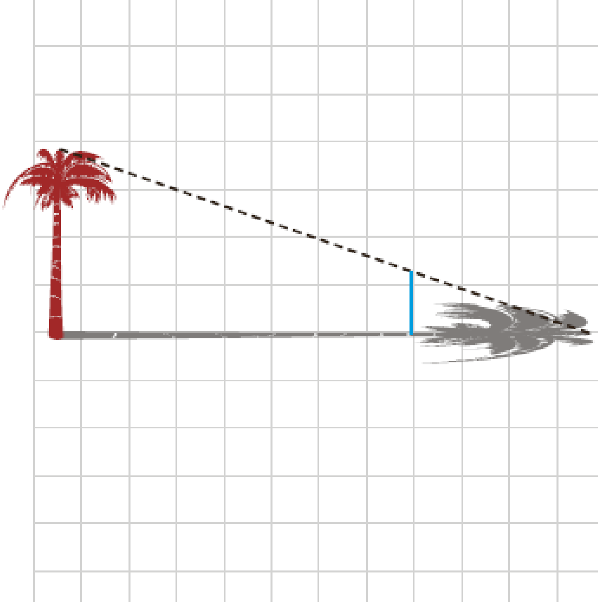
$$\Delta ADE: BC \parallel DE \rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

$$\Delta ADF: BE \parallel DF \rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$$

$$\rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE^2 = AC \times AF$$

تمرین

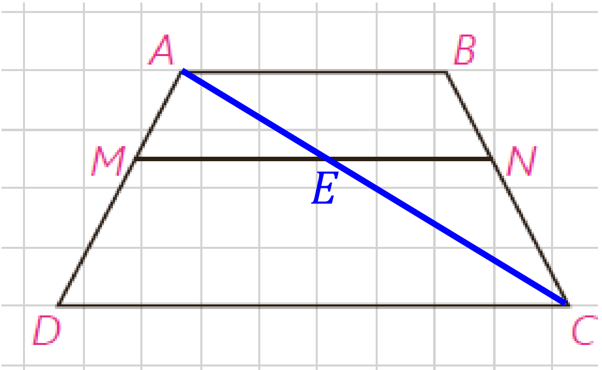
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



$$\frac{3}{60} = \frac{1}{x} \to 3x = 60 \to x = 20$$

تمرین

۷ــ در ذوزنقه مقابل MN||AB||CD ، ثابت کنید :



$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)

اثبات : این سوال در اسلایدهای قبل بررسی شده

قطر AC را رسم نموده تا MN را در نقطه E قطع کند

$$\Delta ACD: ME \parallel CD \rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC} \qquad (1)$$

$$\Delta ABC: EN \parallel AB \rightarrow \frac{BN}{NC}=\frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

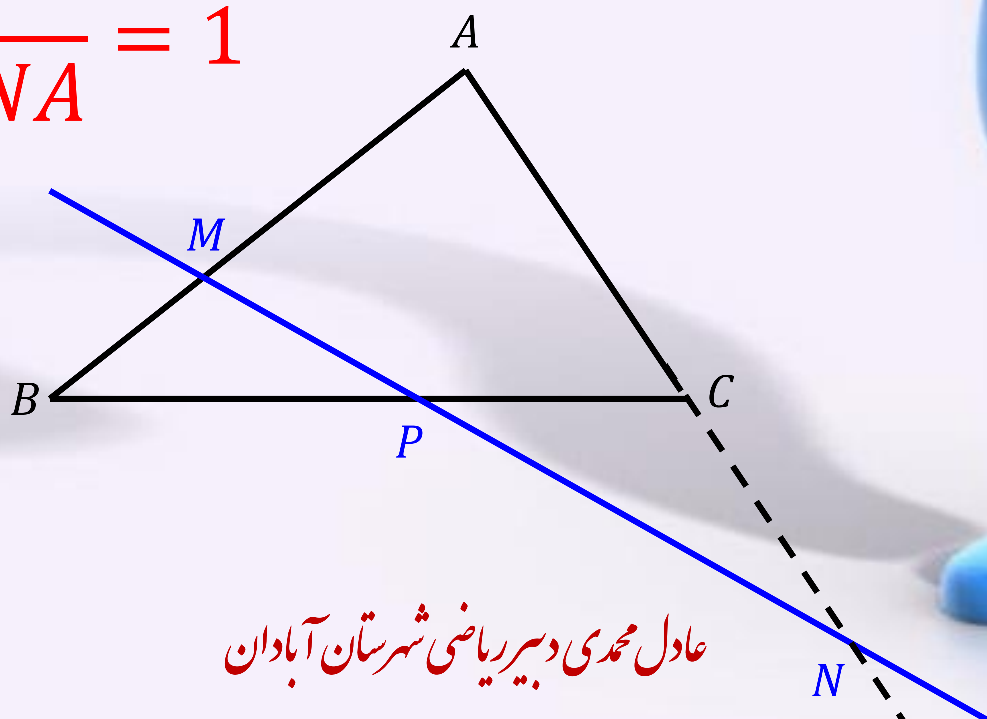
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

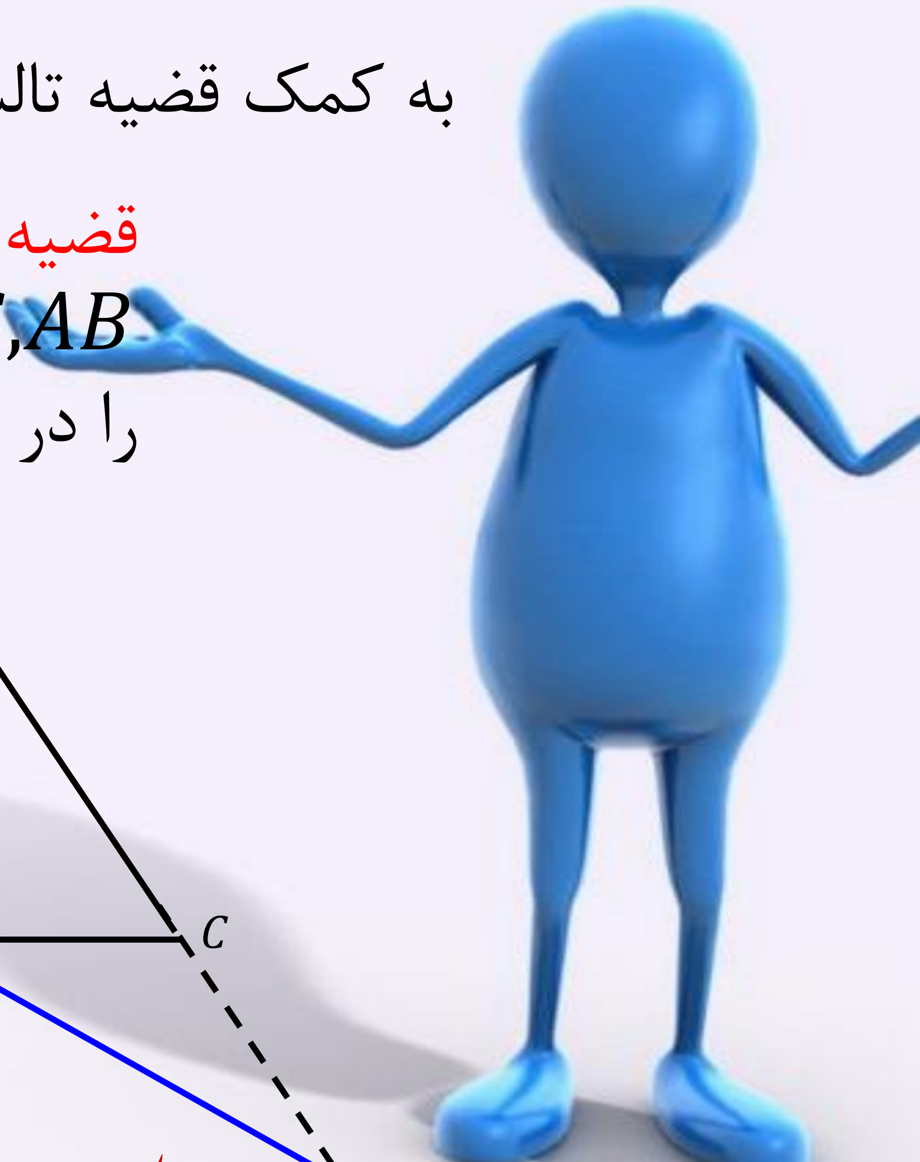
فکر کنید

به کمک قضیه تالس قضیه منلائوس را ثابت کنید.

قضیه منلائوس : اگر خطی اضلاع BC,AC,AB از مثلث ABC یا امتداد آنها را در نقاط $P,N\ ,M$ قطع کند . آنگاه :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=1$$



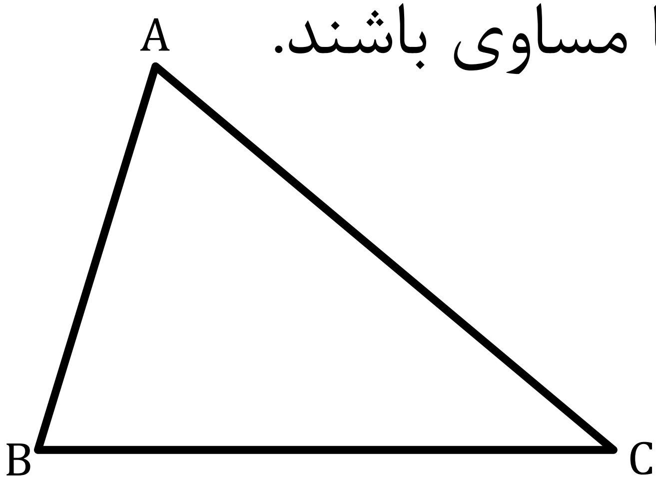


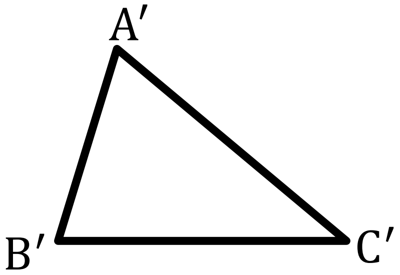
درس سوم

تشابه مثلث ها

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تعریف تشابه دو مثلث : دو مثلث متشابه اند اگر و تنها اگر اضلاع متناظر آنها متناسب و زاویه های متناظر آنها مساوی باشند.

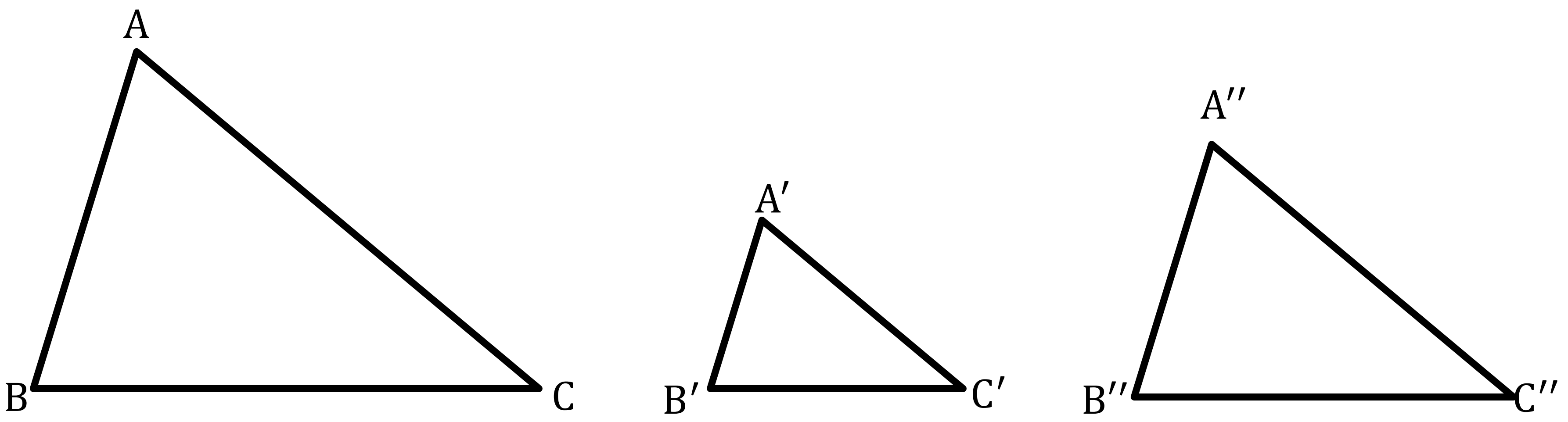




$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}=k\\[2em]\hat{A}=\hat{A}',\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\}\Leftrightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

توجه : نسبت اضلاع متناظر دو مثلث متشابه را نسبت تشابه می نامند و در اینجا k نسبت تشابه دو مثلث است.

نتیجه :



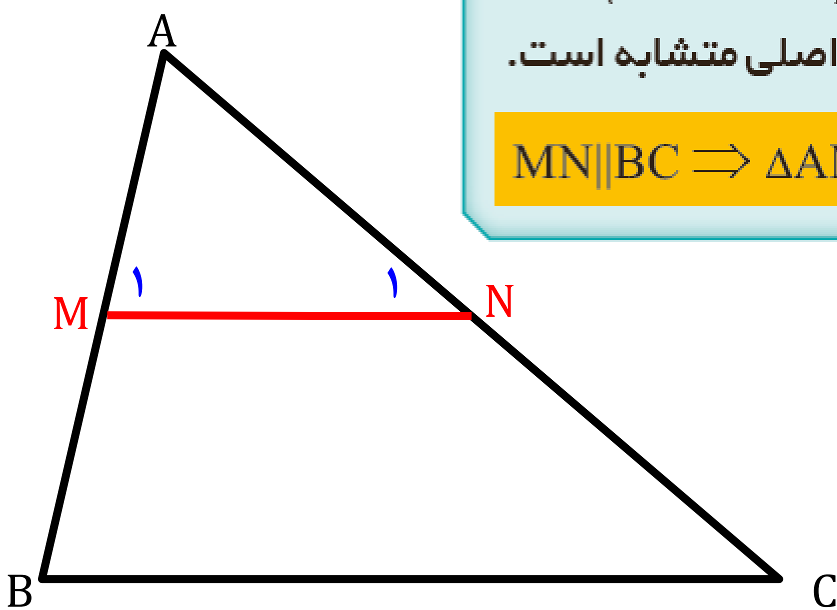
اگر $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ و $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ آنگاه

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$MN \| BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$



اثبات : فرض کنیم خطی اضلاع AC و AB از مثلث ABC را در دو نقطه N و M قطع کند و MN ∥ BC در این صورت :

$MN \parallel BC \rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}$ و AB مورب (1)

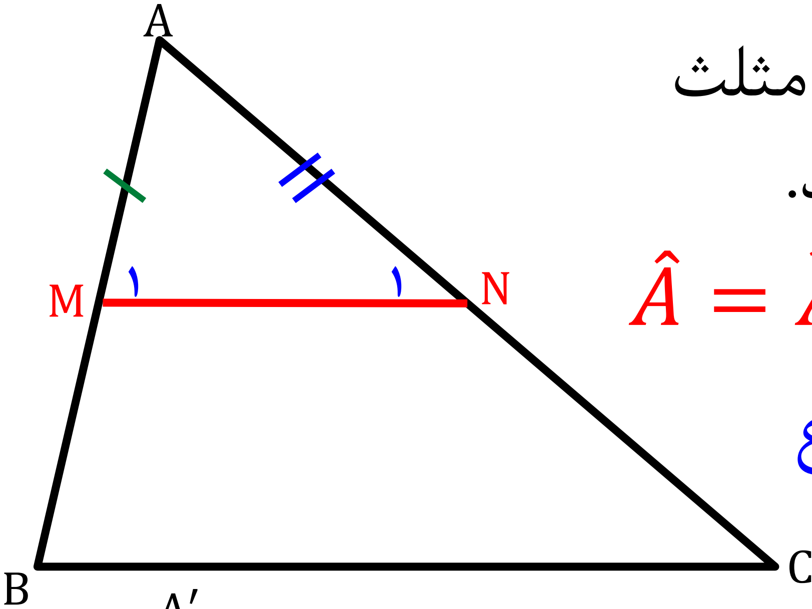
$MN \parallel BC \rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{C}$ و AC مورب (2)

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{NM}{BC} \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

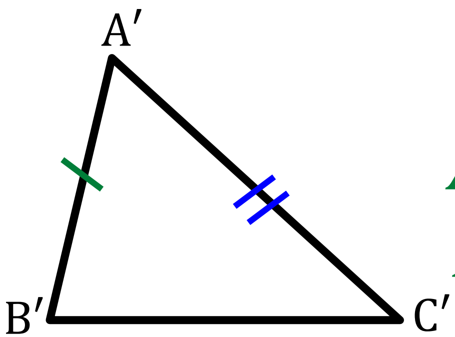
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

قضیه : اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشند آن دو مثلث متشابه اند.



$$\hat{A}=\widehat{A'},\hat{B}=\widehat{B'} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات : نقاط M ,N را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC چنان انتخاب می کنیم که $\mathrm{AM}=\mathrm{A'B'},\mathrm{AN}=\mathrm{A'C'}$

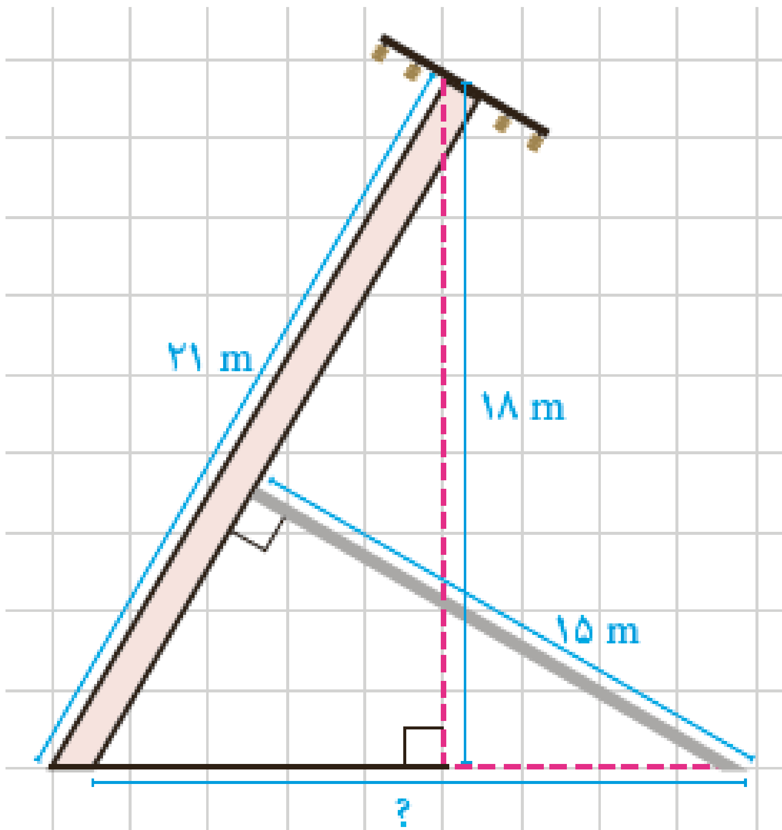


$$\left.\begin{array}{r} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ \hat{A}=\widehat{A'} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \rightarrow \widehat{B'}=\widehat{M}_1$$

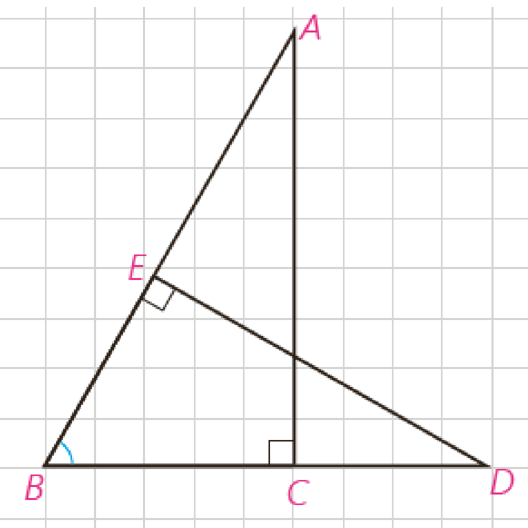
$$\xrightarrow{\hat{B}=\widehat{B'}} \hat{B}=\widehat{M}_1 \rightarrow MN \parallel BC \rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\xRightarrow{\Delta AMN \cong \Delta A'B'C'} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

مثال : مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟



حل : اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.



حال در دو مثلث ABC و BDE داریم :

$$\angle B=\angle B\ ,\ \angle C=\angle E=۹۰^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Delta ABC\sim\Delta BDE\Rightarrow$$

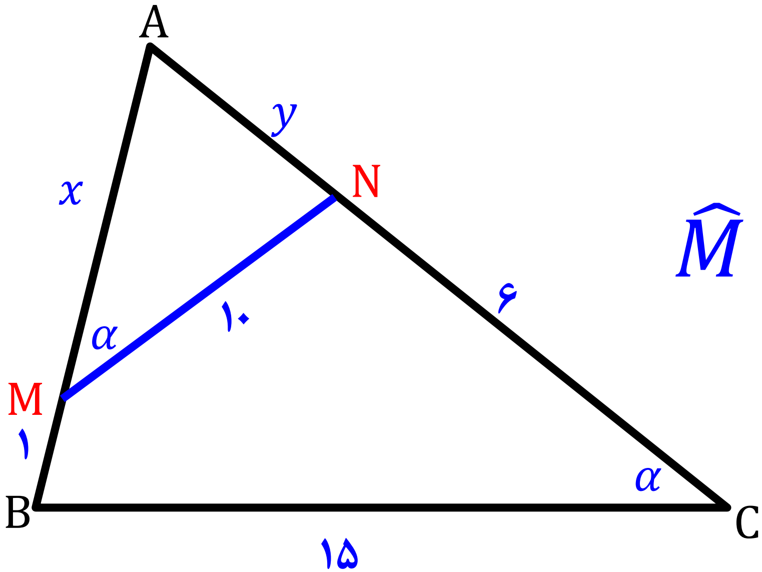
(در نوشتن نسبت تشابه، توجّه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۸}=\frac{BD}{۲۱}\Rightarrow BD=\frac{۲۱\times ۱۵}{۱۸}=۱۷/۵m$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصلهٔ ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

مثال ۲: در مثلث ΔABC شکل مقابل مقادیر x, y را حساب کنید

پاسخ :

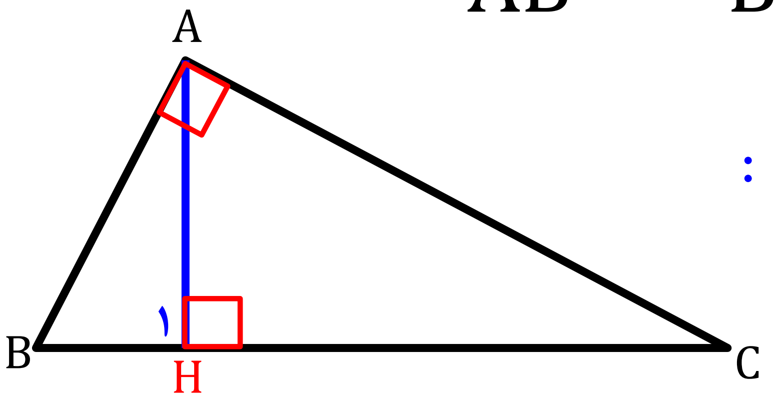


$$\left.\begin{aligned}\widehat{M}=\hat{C}=\alpha\\ \hat{A}=\hat{A}\end{aligned}\right\}\rightarrow \Delta AMN\sim\Delta ABC$$

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}\rightarrow\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}+1}=\frac{10}{15}=\frac{x}{\mathrm{y}+6}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}+1}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{x}{\mathrm{y}+6}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x+2=3y\\ 3x=2y+12\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x-3y=-2\\ 3x-2y=12\end{cases}\rightarrow x=8, y=6$$

مثال ۳ :در مثلث ΔABC شکل مقابل $\widehat{A} = 90°$ و AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث است . ثابت کنید : $AB^2 = BH \times BC$

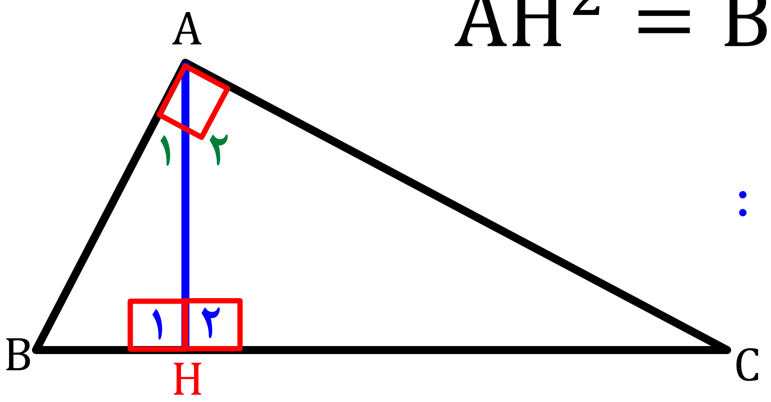


اثبات : در دو مثلث ABH,ABC داریم :

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \widehat{H}_1 = 90°\\ \hat{B} = \hat{B}\end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ABC$$

$$\rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AH} = \frac{AB}{BH} \rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

مثال ۴ :در مثلث ΔABC شکل مقابل $\hat{A} = 90°$ و AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث است . ثابت کنید : $AH^2 = BH \times HC$



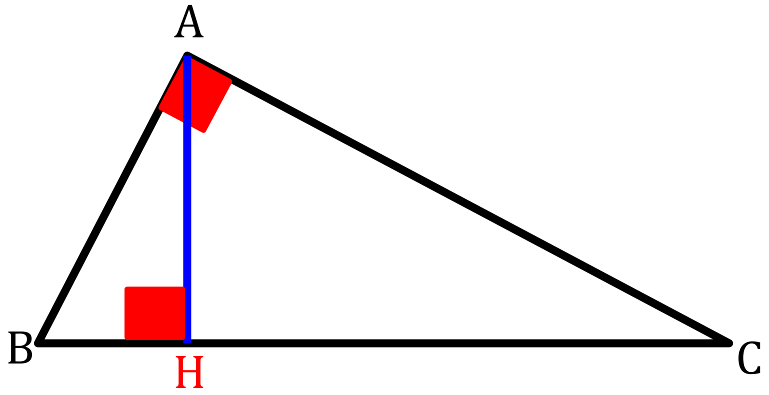
اثبات : در دو مثلث ABH,ACH داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABH: \widehat{H}_1 = 90° \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} = 90° \\ \Delta ABC: \hat{A} = 90° \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90° \\ \hat{B} = \hat{A}_2\end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ACH$$

$$\rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \times HC$$

نتایج : اگر در مثلث ΔABC داشته باشیم $\hat{A} = 90°$ و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد. آنگاه روابط زیر برقرار است



$1)\Delta ABH \sim \Delta ACH \sim \Delta ABC$

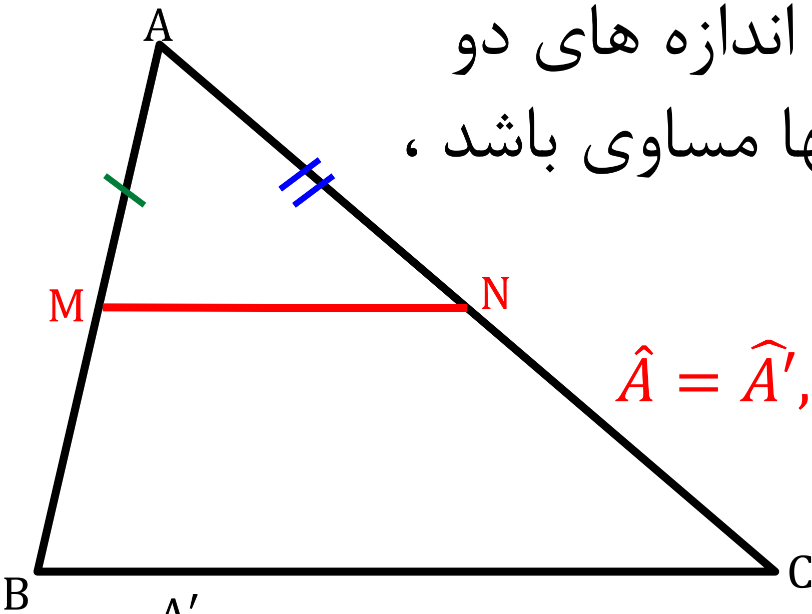
$2)\ AH^2 = BH \times HC$

$3)\ AB^2 = BH \times BC$

$4)\ AC^2 = CH \times BC$

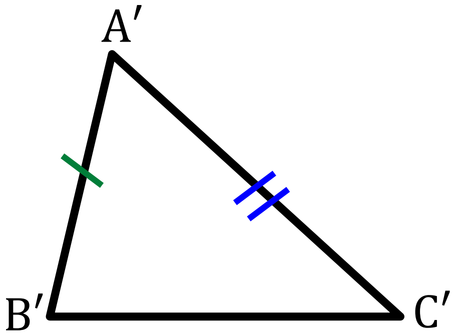
$5)\ BC \times AH = AB \times AC = 2S_{\Delta ABC}$

قضیه : اگر اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها مساوی باشد ، آن دو مثلث متشابه اند.



$$\hat{A}=\widehat{A'},\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

اثبات : نقاط N, M را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC چنان انتخاب می کنیم که $\mathrm{AM}=\mathrm{A'B'},\mathrm{AN}=\mathrm{A'C'}$

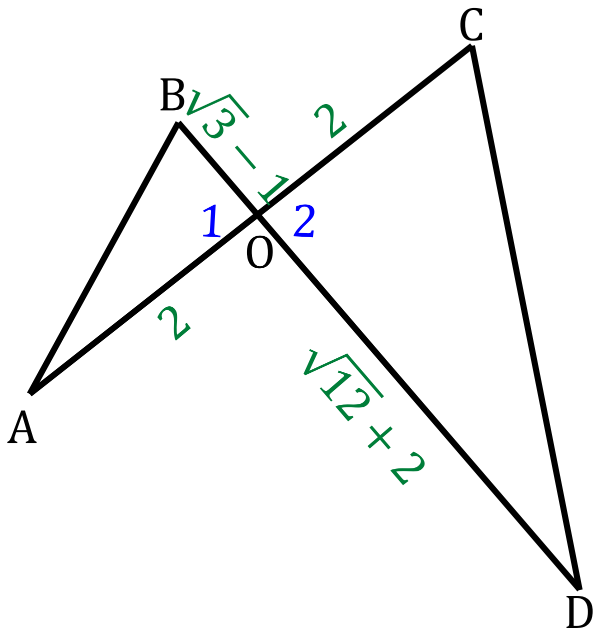


$$\left.\begin{array}{c} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ \hat{A}=\widehat{A'} \end{array}\right\}\rightarrow \Delta AMN\cong\Delta A'B'C' \quad (1)$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\rightarrow \Delta ABC:\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\rightarrow MN\parallel BC\rightarrow \Delta AMN\sim\Delta ABC \ \ (2)$$

$$(1),(2)\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

مثال ۱ : دلیل تشابه دو مثلث OAB و OCD در شکل مقابل چیست ؟



پاسخ :

$$OA \times OC = 2 \times 2 = 4$$

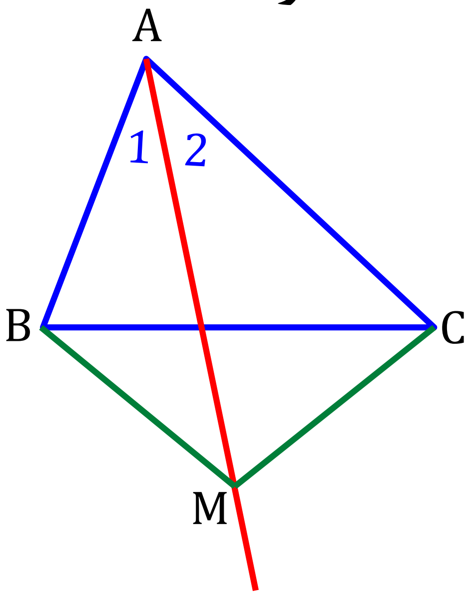
$$OD = \sqrt{12} + 2 = 2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$OD \times OB = 2\left(\sqrt{3} + 1\right) \times \left(\sqrt{3} - 1\right)$$
$$= 2(3 - 1) = 4$$

$$\rightarrow OA \times OC = OD \times OB$$

$$\rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$$ و $$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OCD$$

مثال ۲ : اگر M نقطه ای روی امتداد نیمساز زاویه A از مثلث ABC بوده و AM میانگین هندسی AB و AC باشد . ثابت کنید دو مثلث ABM و ACM متشابه اند.



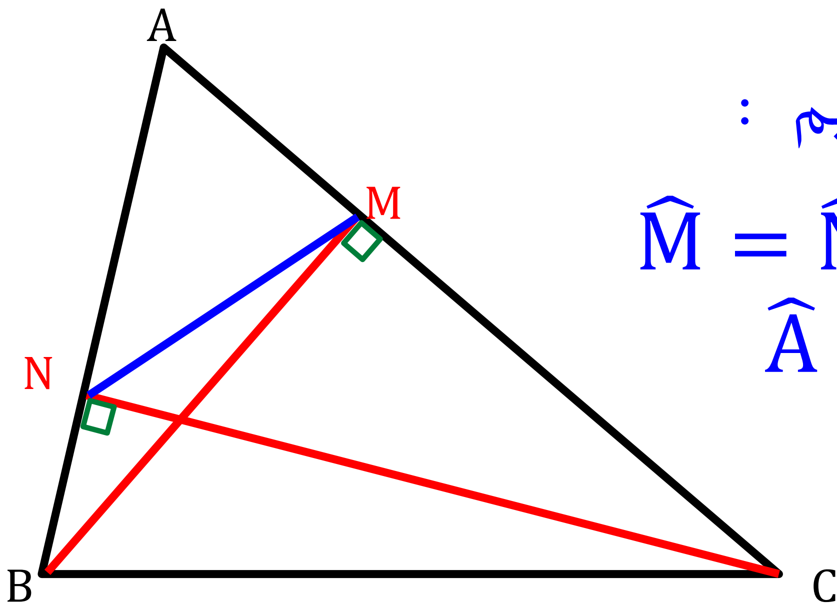
فرض : $AM^2 = AB \times AC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم : $\Delta ABM \sim \Delta ACM$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{c} AM^2 = AB \times AC \rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ACM$$

مثال۳ : در شکل مقابل BM و CNارتفاع های وارد بر اضلاع AC و AB از مثلث ABC هستند . ثابت کنید دو مثلث ABC, AMN متشابه اند.



اثبات : در دو مثلث ABM و ACN داریم :

$$\left.\begin{array}{c}\hat{\mathrm{M}}=\hat{\mathrm{N}}=90^\circ\\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta\mathrm{ABM}\sim\Delta\mathrm{ACN}$$

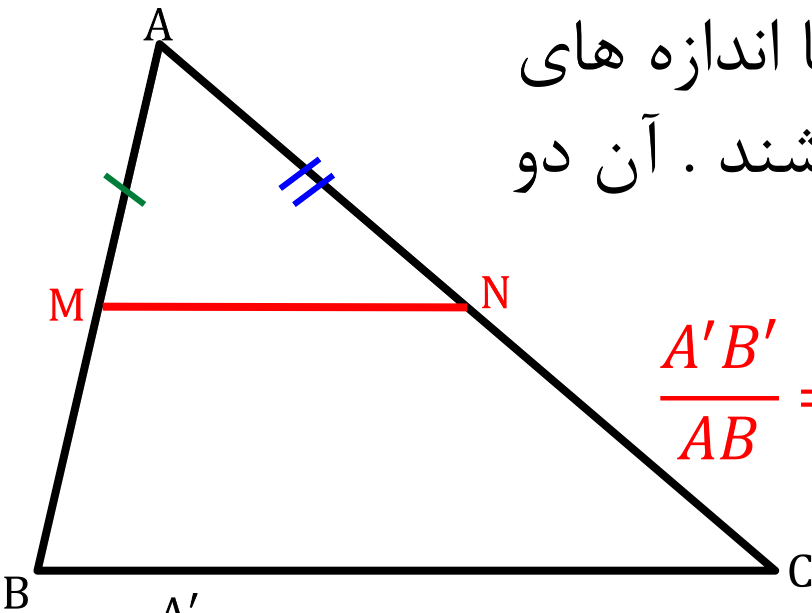
$$\rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CN}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} \quad (1)$$

پس در دو مثلث AMN و ABC می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{c}(1)\rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AN}\rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}\\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta AMN\sim\Delta ABC$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

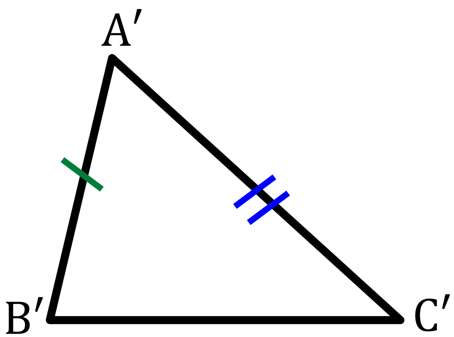
قضیه : اگر اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع متناظر از مثلث دیگر متناسب باشند . آن دو مثلث متشابه اند.



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

اثبات : نقاط M ,N را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC چنان انتخاب می کنیم که

$AM = A'B'$,$AN = A'C'$



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\rightarrow \Delta ABC : \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\rightarrow MN \parallel BC \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} AM = A'B' \\ AN = A'C' \\ \text{وفرض}(1)\rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC}\rightarrow MN = B'C' \end{array}\right\}\rightarrow \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \quad (2)$$

$$(1)\ \rightarrow \Delta AMN\sim\Delta ABC\xrightarrow{(2)}\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

مثال ۱ :

الف : اگر طول اضلاع مثلث ABC ، ۴/۵ و۶ و۹ واحد و طول اضلاع مثلث A’B’C’ برابر ۸و۶و۱۲ واحد باشد آیا این دو مثلث متشابه اند ؟ چرا ؟

پاسخ : طول اضلاع دو مثلث را از کوچک به بزرگ مرتب نموده تا اضلاع متناظر را تشخیص دهیم :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{4.5}{6}=\frac{3}{4}\,,\frac{AC}{A'C'}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\,,\frac{BC}{B'C'}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

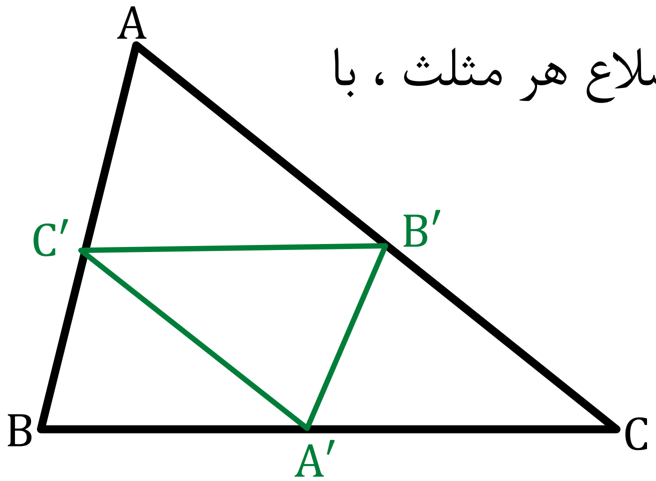
$$\rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{3}{4}\rightarrow\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

ب : اگر طول اضلاع مثلث ABC ، $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$واحد و طول اضلاع مثلث A’B’C’ برابر $\sqrt{10}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $2-\sqrt{2}$ واحد باشد آیا این دو مثلث متشابه اند ؟ چرا ؟

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,\frac{A'C'}{AC}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}-1,\frac{B'C'}{BC}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}-1$$

$$\rightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\sqrt{2}-1\rightarrow\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

مثال ۲ : ثابت کنید مثلث حاصل از وصل کردن وسط های اضلاع هر مثلث ، با آن مثلث متشابه است .



اثبات : فرض کنیم A',B',C' به ترتیب وسطهای اضلاع BC,AC,AB از مثلث ABC باشند در این صورت :

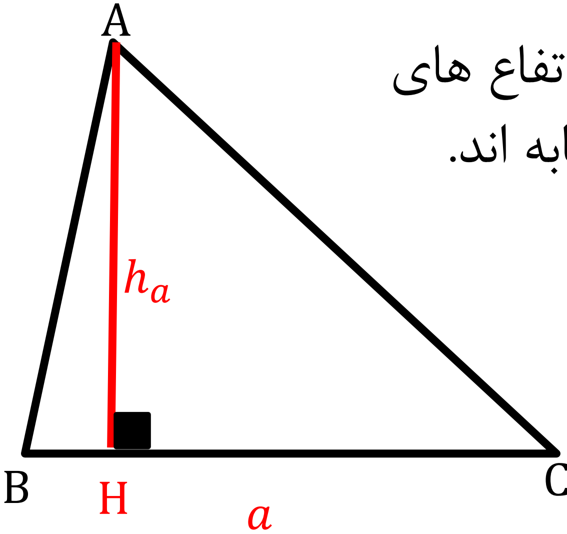
$$\frac{AC'}{AB}=\frac{AB'}{AC}=\frac{1}{2}\rightarrow BC \parallel B'C' \rightarrow \frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}$$

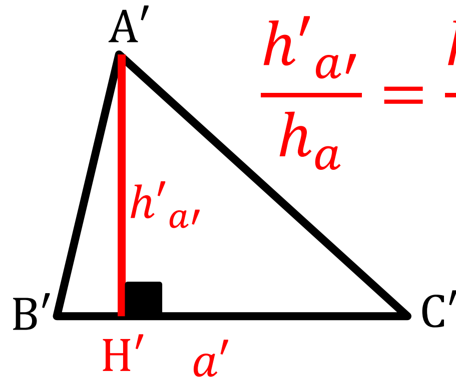
به روش مشابه می توان نتیجه گرفت :

$$AC \parallel A'C' \rightarrow \frac{A'C'}{AC}=\frac{1}{2} \quad , \qquad AB \parallel A'B' \rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}\rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

مثال ۳ : ثابت کنید اگر اندازه های سه ارتفاع از مثلثی با اندازه های ارتفاع های وارد بر اضلاع متناظر از مثلث دیگر متناسب باشند . آن دو مثلث متشابه اند.





$$\frac{h'_{a'}}{h_a}=\frac{h'_{b'}}{h_b}=\frac{h'_{c'}}{h_c}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

اثبات : فرض کنیم h_c , h_b, h_a به ترتیب ارتفاع های وارد بر اضلاع $BC=a,AC=b,AB=c$ از مثلث ABC و $h'_{c'}$, $h'_{b'}$, $h'_{a'}$ به ترتیب ارتفاع های وارد بر $B'C'=a',A'C'=b',A'B'=c'$ از مثلث A'B'C' باشند در این صورت :

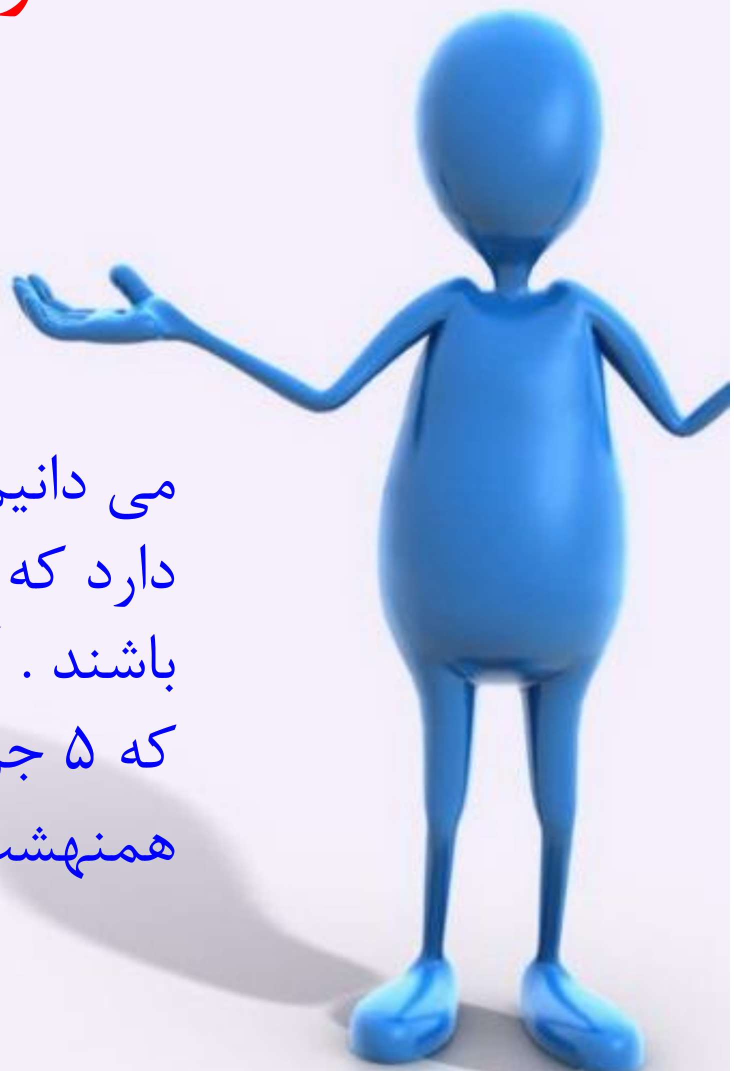
$$S=\frac{1}{2}ah_a\rightarrow 2S=ah_a\rightarrow h_a=\frac{2S}{a}\qquad S'=\frac{1}{2}a'h'_{a'}\rightarrow 2S'=a'h'_{a'}\rightarrow h'_{a'}=\frac{2S'}{a'}$$

به روش مشابه می توان نتیجه گرفت :

$$\frac{h'_{a'}}{h_a}=\frac{h'_{b'}}{h_b}=\frac{h'_{c'}}{h_c}\rightarrow \frac{\frac{2S'}{a'}}{\frac{2S}{a}}=\frac{\frac{2S'}{b'}}{\frac{2S}{b}}=\frac{\frac{2S'}{c'}}{\frac{2S}{c}}\rightarrow \frac{2S'a}{2Sa'}=\frac{2S'b}{2Sb'}=\frac{2S'c}{2Sc'}\rightarrow$$

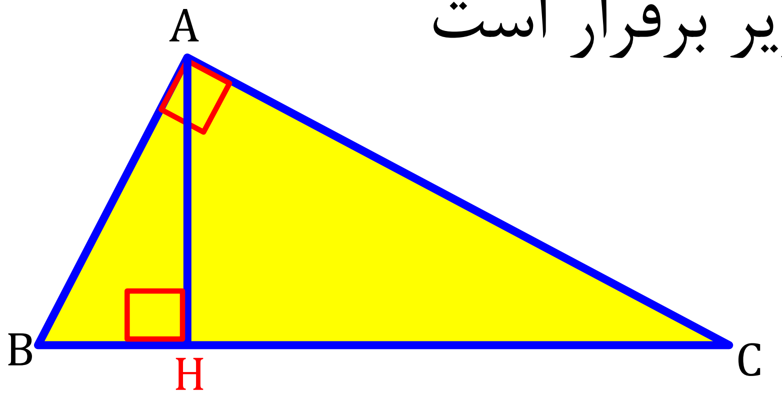
$$\rightarrow \frac{S'}{S}\times\frac{a}{a'}=\frac{S'}{S}\times\frac{b}{b'}=\frac{S'}{S}\times\frac{c}{c'}\xrightarrow{\div\frac{S'}{S}}\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

فکر کنید



می دانیم که هر مثلث شش جزء اصلی دارد که شامل سه ضلع و سه زاویه می باشند . آیا می توان دو مثلث تشکیل داد که ۵ جزء مساوی داشته باشند ولی همنهشت نباشند.

یاد آوری : اگر در مثلث ΔABC داشته باشیم $\widehat{A} = 90°$ و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد. آنگاه روابط زیر برقرار است



$$1)\ AH^2 = BH \times HC$$

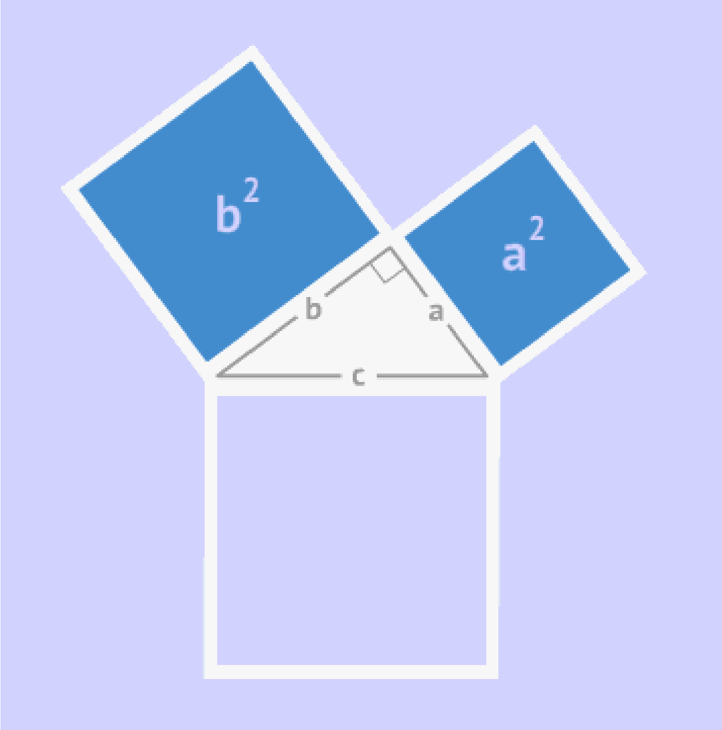
$$2)\ AB^2 = BH \times BC$$

$$3)\ AC^2 = CH \times BC$$

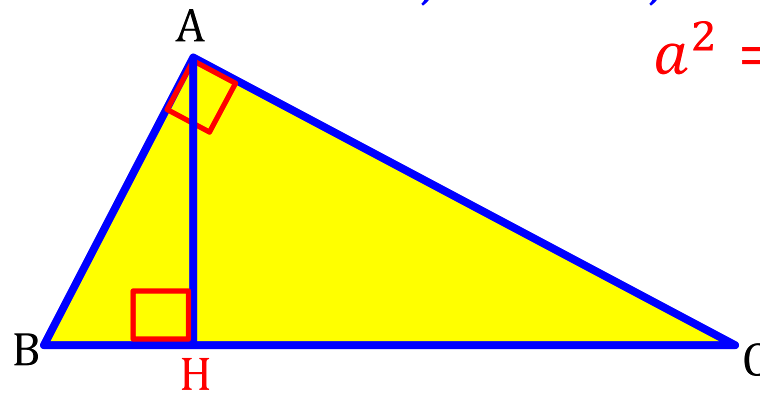
قضیه فیثاغورس : اگر در مثلث ABC داشته باشیم :

$AB = c ,AC = b ,BC = a ,\hat{A} = 90°$

آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$



$a^2 = b^2 + c^2$



اثبات : ارتفاع AH را رسم می کنیم :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC} \quad \text{و} \quad \mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{BC}$$

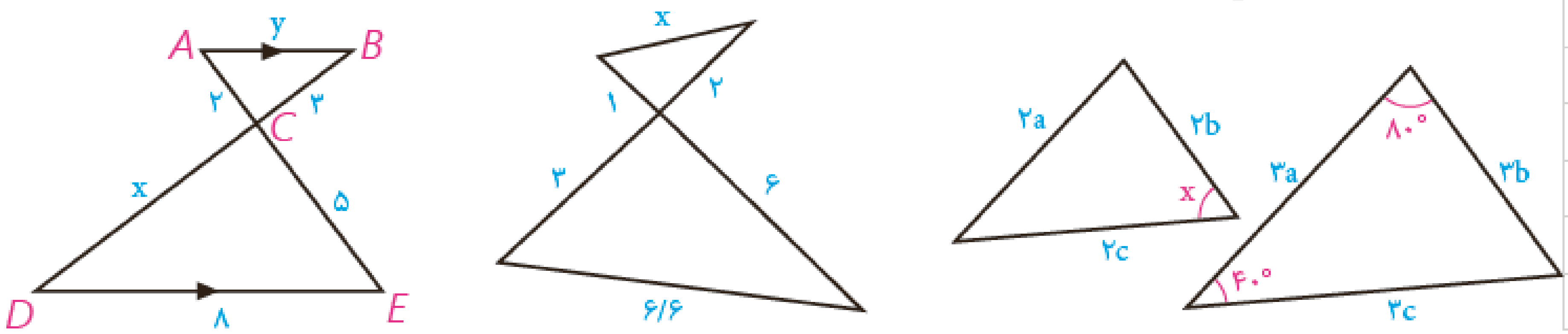
$$\rightarrow \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC} + \mathrm{CH} \times \mathrm{BC} = (BH + CH)BC = BC \times BC = BC^2$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید :

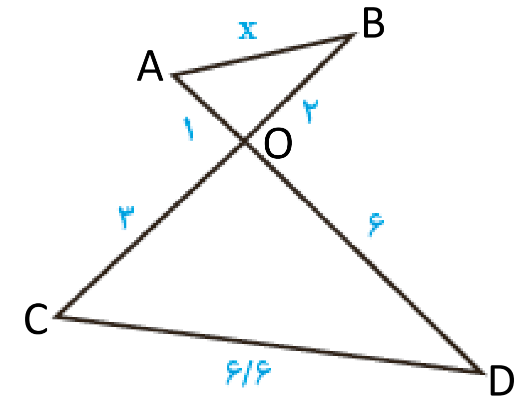
الف ب ج



پاسخ الف :

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel DE \rightarrow \hat{A}=\hat{E} \ \text{و}\ AE \ \text{مورب} \\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta CDE \rightarrow \frac{3}{x}=\frac{2}{5} \rightarrow x=\frac{15}{2}=7.5$$

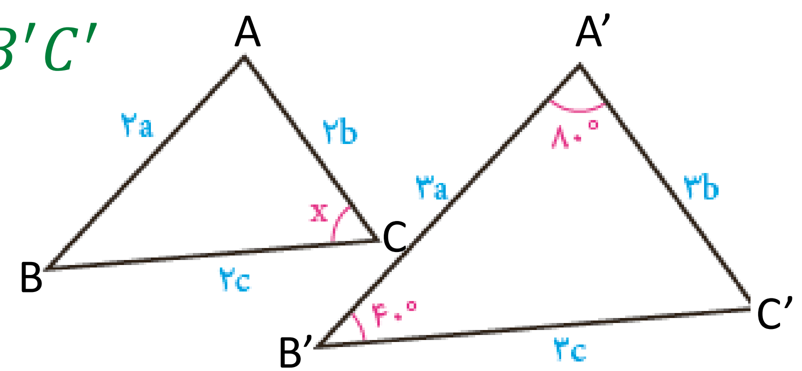
ب



$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{1}{3}\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\end{array}\right\}\rightarrow \Delta OAB\sim\Delta OCD$$

$$\rightarrow \frac{x}{6.6}=\frac{1}{3}\rightarrow x=\frac{6.6}{3}=2.2$$

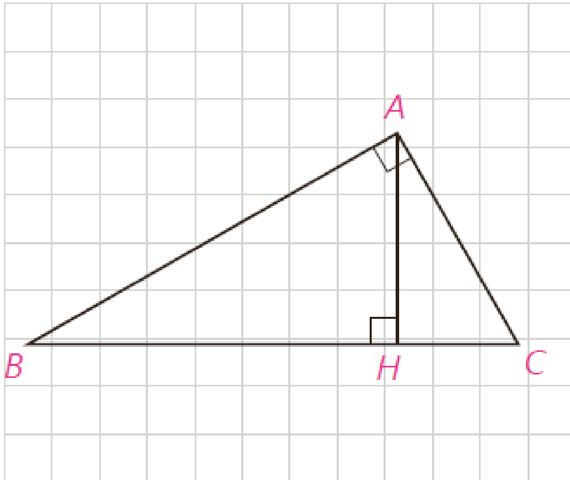
ج



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{2}{3}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

$$\rightarrow \hat{C}=\widehat{C'}=180°-(40°+80°)=60°$$

تمرین



۲ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

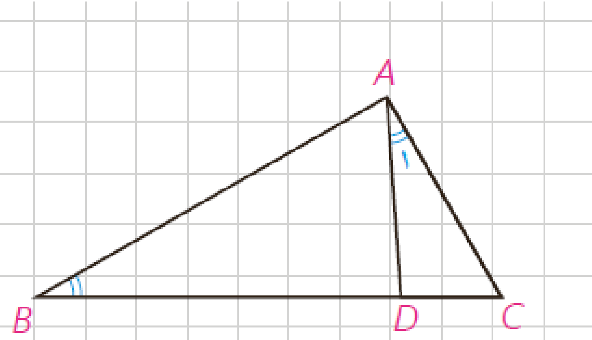
۲) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

پاسخ ۱ :

$$AH^2 = BH \times CH = 9 \times 4 = 36 \to AH = 6$$
$$AB^2 = BH \times BC = 9 \times 13 \to AB = 3\sqrt{13}$$
$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 13 \to AC = 2\sqrt{13}$$

پاسخ ۲ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100 \to BC = 10$$
$$AB^2 = BH \times BC \to 64 = BH \times 10 \to BH = 6.4$$
$$AC^2 = CH \times BC \to 36 = CH \times 10 \to CH = 3.6$$



۳ـ در شکل روبه‌رو $\angle A_۱=\angle B$ و $AC=۴$ و $BD=۶$، طول BC را به‌دست آورید.

پاسخ

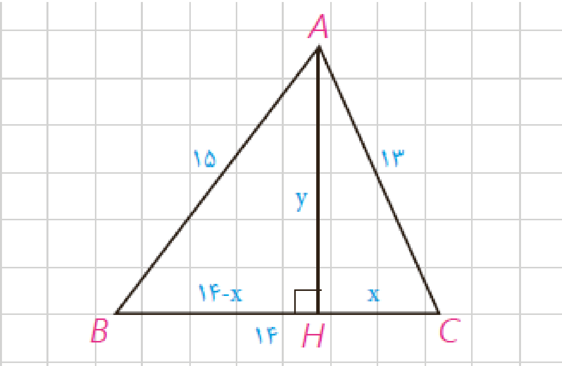
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta ABC\sim\Delta ACD\rightarrow \frac{CD}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{BC}\rightarrow$$

$$\frac{CD}{4}=\frac{4}{6+CD}\rightarrow CD^2+6CD=16$$

$$\rightarrow x^2+6x-16=0\rightarrow (x+8)(x-2)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l}x=-8\ \times\\ x=2\end{array}\right.$$

$$\rightarrow BC=BD+DC=6+2=8$$

تمرین



۴ـ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\Delta ACH:\ CH^2+AH^2=AC^2 \rightarrow x^2+y^2=169$$

$$\Delta ABH:\ BH^2+AH^2=AB^2 \rightarrow (14-x)^2+y^2=225$$

$$\rightarrow 196-28x+x^2+y^2=225 \rightarrow 196-28x+169=225$$

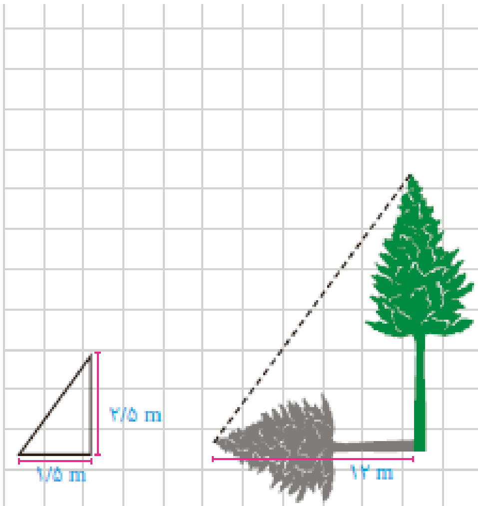
$$\rightarrow 28x=196+169-225=140 \rightarrow x=\frac{140}{28}=5$$

$$x^2+y^2=169 \rightarrow 25+y^2=169 \rightarrow y^2=144 \rightarrow y=12$$

تمرین

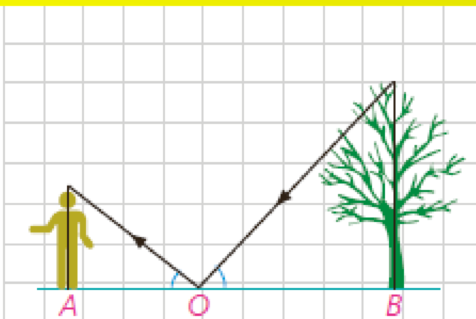
۵ــ در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجّه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

الف) روش ترانه : ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم‌زمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. با توجه به شکل ارتفاع این درخت چند متر است؟

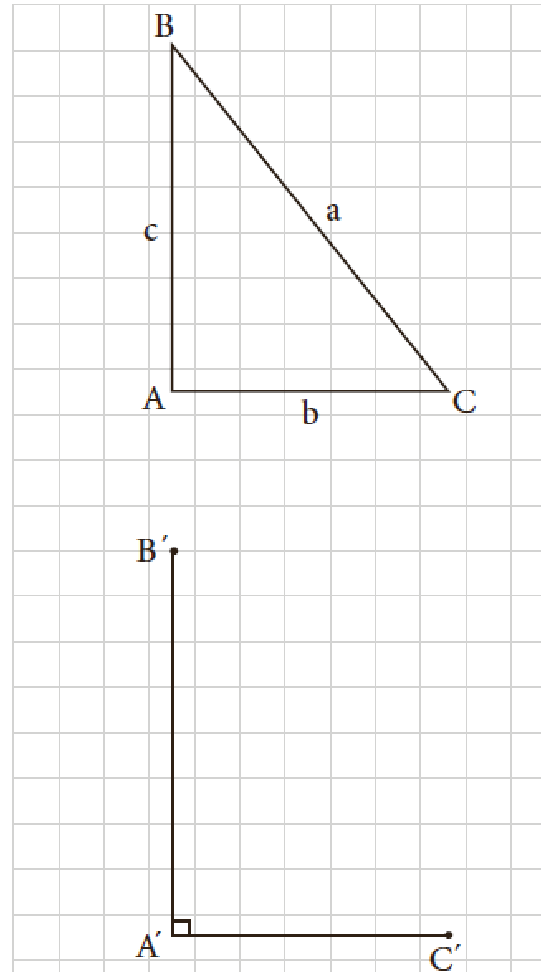


$$\frac{1.5}{12}=\frac{2.5}{h}\rightarrow h=\frac{30}{1.5}=20$$

ب) روش شهرزاد : شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطهٔ O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجّه به آنچه از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



$$\frac{1.6}{h}=\frac{2.5}{20}\rightarrow h=\frac{32}{2.5}=12.8$$



۶ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A'} = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

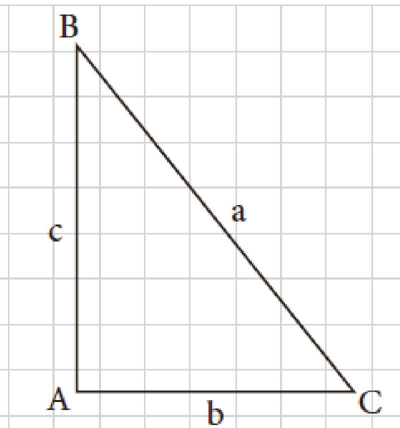
۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A'} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن‌را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

تمرین

عکس قضیه فیثاغورس :

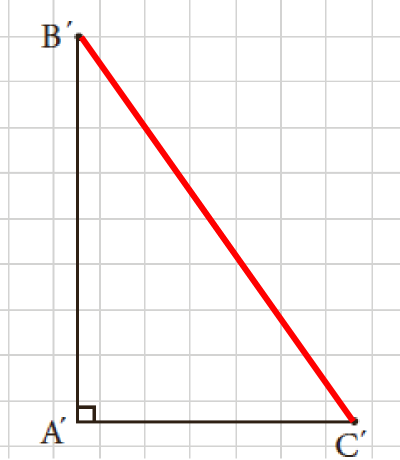
اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AB = c, AC = b, BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$
آنگاه $\hat{A} = 90°$



اثبات : مثلث $A'B'C'$ با معلومات $A'B' = c, A'C' = b, \hat{A'} = 90°$ را
در نظر می گیریم :

$$\Delta A'B'C' : \hat{A'} = 90° \rightarrow B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2$$

$$\rightarrow B'C'^2 = b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow B'C' = a \rightarrow BC = B'C'$$



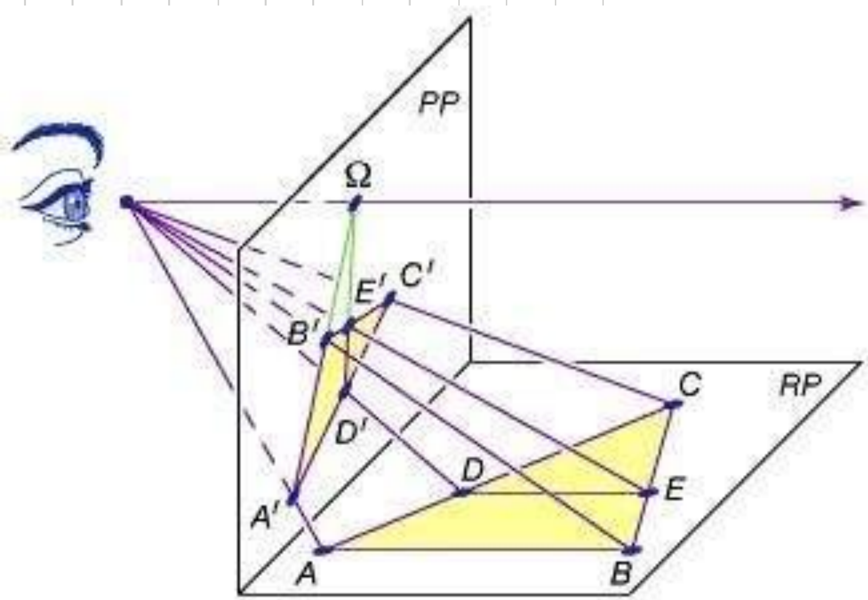
$$\left.\begin{aligned} AB = A'B' = c \\ AC = A'C' = b \\ BC = B'C' = a \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \rightarrow \hat{A} = \hat{A'} = 90°$$

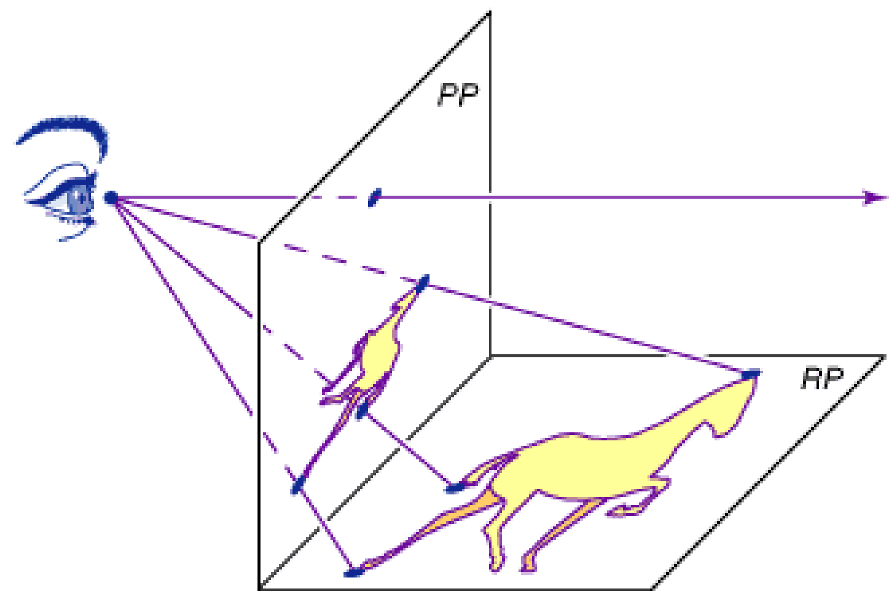
قضیه دو شرطی فیثاغورس:

مثلث ABC با معلومات $AB = c, AC = b, BC = a$ در راس A قائمه
است . اگر وتنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث ها

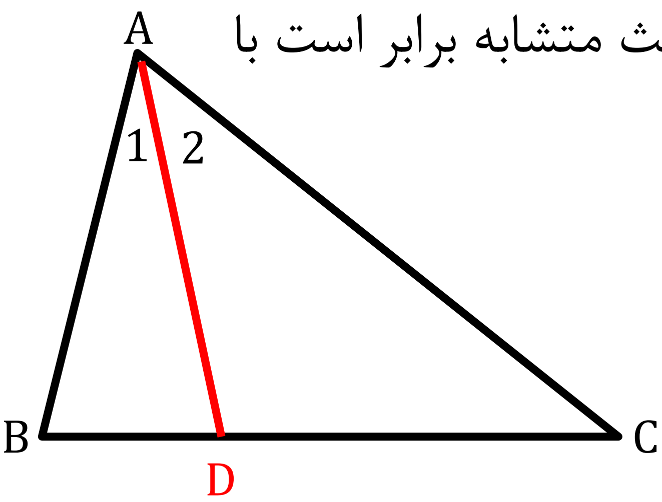
نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه





قضیه ۱

نسبت اندازه های نیمسازهای زاویه های داخلی متناظر در دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه آن دو مثلث.

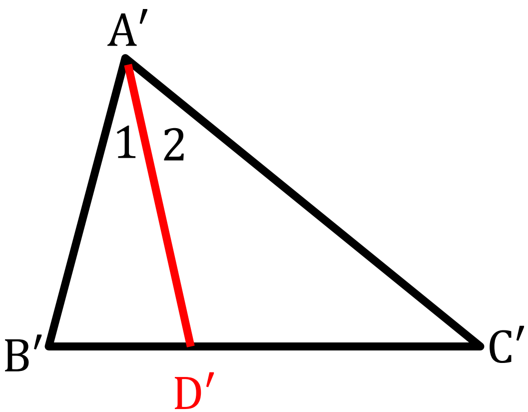


فرض : $\widehat{A'}_2 = \widehat{A'}_1$ ، $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$ ، $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

حکم :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'D'}{AD} = k$$

اثبات :



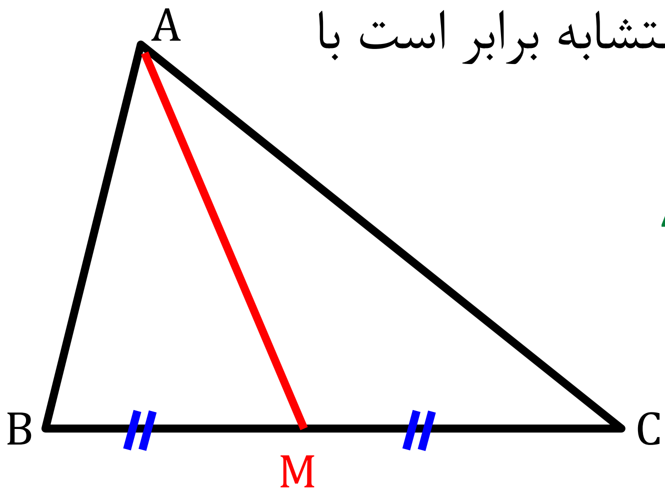
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \xrightarrow{\div 2} \widehat{A}_1 = \widehat{A'}_1 \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$$

پس در دو مثلث $A'B'D'$ ، ABD داریم :

$$\left.\begin{matrix} \widehat{A}_1 = \widehat{A'}_1 \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix}\right\} \rightarrow \Delta ABD \sim \Delta A'B'D' \rightarrow \frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

قضیه ۲

نسبت اندازه های میانه های وارد بر اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه آن دو مثلث.



فرض : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$,$BM = MC$,$B'M' = C'M'$

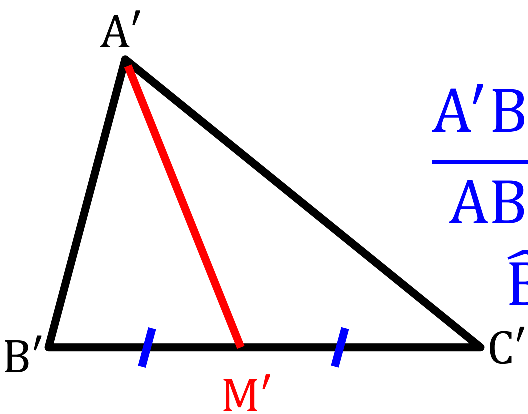
حکم :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'M'}{AM} = k$$

اثبات :

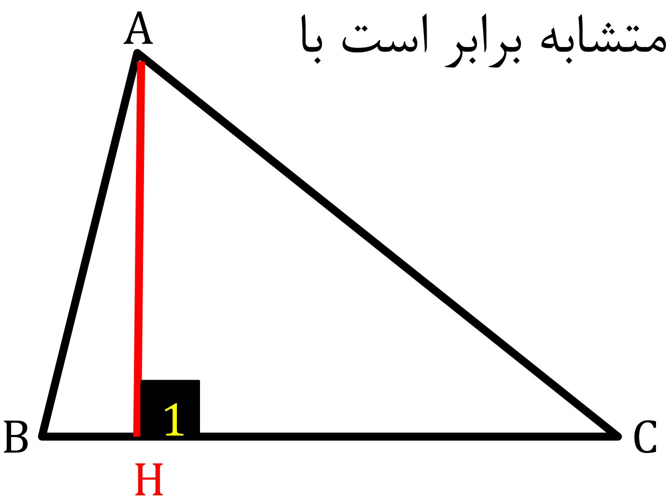
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \begin{cases} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \rightarrow k = \frac{2B'M'}{2BM} = \frac{B'M'}{BM} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$$

پس در دو مثلث ABM ,$A'B'M'$ داریم :



$$\left. \begin{matrix} \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta ABM \sim \Delta A'B'M' \rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

قضیه ۳

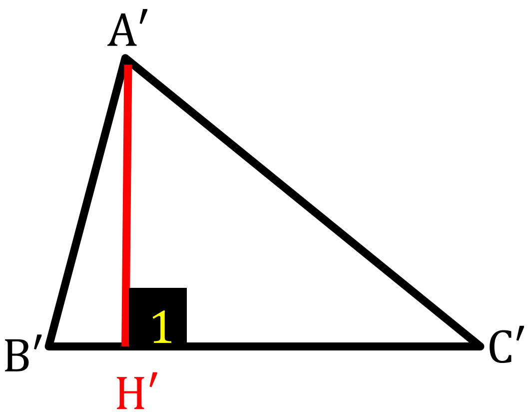


نسبت اندازه های ارتفاع های وارد بر اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه آن دو مثلث.

فرض : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$,$AH \perp BC$,$A'H' \perp B'C'$

حکم :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'H'}{AH} = k$$



اثبات :

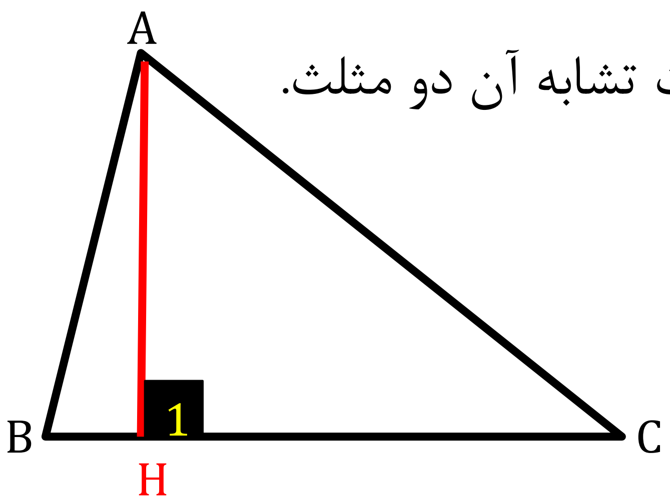
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \begin{cases} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

پس در دو مثلث $A'C'H'$,ACH داریم :

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{H}_1 = \widehat{H'}_1 = 90^\circ \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ACH \sim \Delta A'C'H' \rightarrow \frac{A'H'}{AH} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

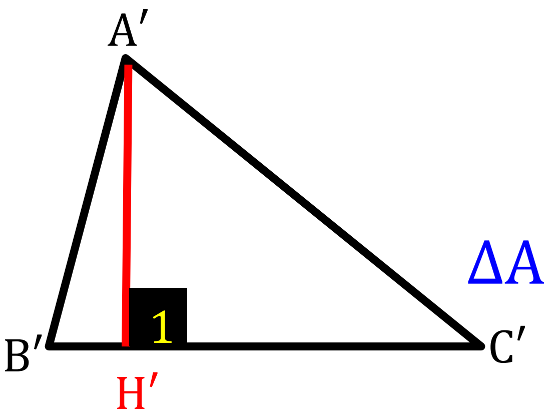
قضیه ۴

نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر است با **مجذور** نسبت تشابه آن دو مثلث.



فرض : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

حکم : $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$



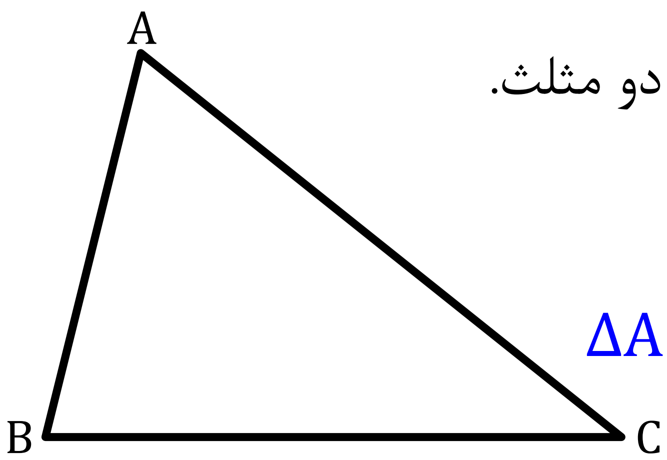
اثبات : ارتفاع های AH و A'H' را رسم می کنیم :

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'H'}{AH}=k$$

$$\rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H' \times B'C'}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k \times k = k^2$$

قضیه ۵

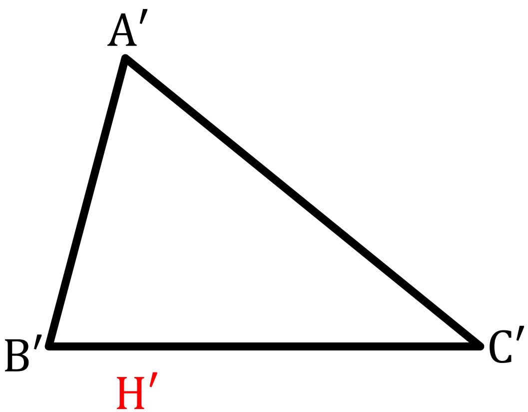
نسبت محیط های دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه آن دو مثلث.



اثبات :

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

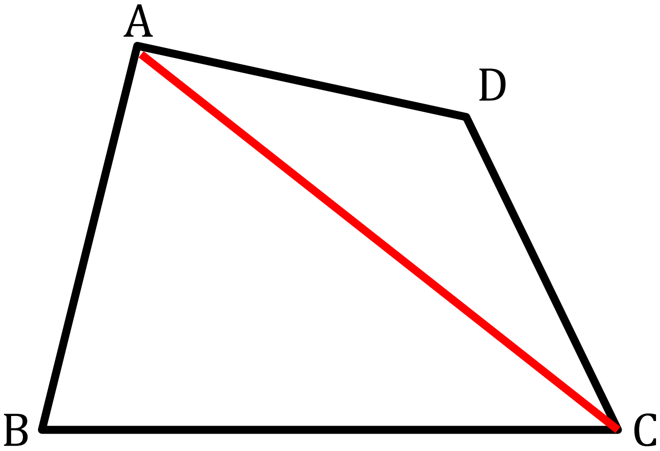
با استفاده از ویژگی های تناسب می توان نتیجه گرفت که :



$$k = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{2P'}{2P}$$

توجه : محیط یک چند ضلعی یعنی مجموع طول های اضلاع آن چند ضلعی و معمولا محیط را با 2P نشان می دهند که P مخفف کلمه premeter به معنی محیط است.

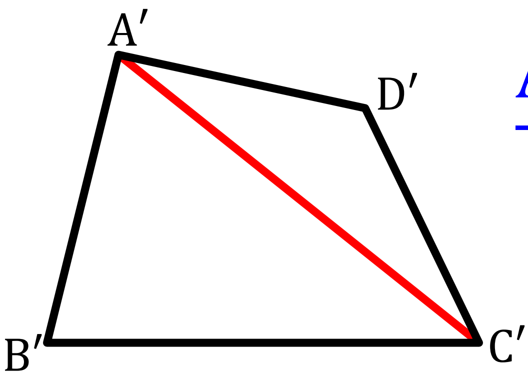
مثال : ثابت کنید نسبت مساحت های دو چهار ضلعی متشابه برابر است با مجذورنسبت تشابه آن دو چهارضلعی .



اثبات :

$$\blacksquare ABCD \sim \blacksquare A'B'C'D' \rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{A'D'}{AD} = k \\ \widehat{A} = \widehat{A}' , \widehat{B} = \widehat{B}', \widehat{C} = \widehat{C}', \widehat{D} = \widehat{D}' \end{cases}$$

قطر های AC و A’C’ را رسم می کنیم :



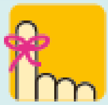
$$\left.\begin{aligned} \frac{A'B'}{AB} &= \frac{B'C'}{BC} \\ \widehat{B} &= \widehat{B}' \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$$

به روشی مشابه می توان ثابت کرد : $\dfrac{S_{\Delta A'D'C'}}{S_{\Delta ADC}} = k^2$

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta A'D'C'}}{S_{\Delta ADC}} = k^2 \rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'} + S_{\Delta A'D'C'}}{S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}} = k^2 \rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{\Delta ABCD}} = k^2$$

نتایج

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.



هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کار در کلاس

۱ــ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

پاسخ :

$$k=\frac{2p'}{2p}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

$$k^2=\frac{S'}{S}\rightarrow\frac{25}{81}=\frac{S'}{15}\rightarrow S'=\frac{125}{27}$$

کار در کلاس

۲ــ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

پاسخ :

$$k^2 = \frac{S'}{S} \to k^2 = \frac{4}{9} \to k = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{2p\prime}{2p} \to \frac{2}{3} = \frac{12}{2p} \to 2p = 18$$

یا

$$\frac{2}{3} = \frac{2p'}{12} \to 2p' = 8$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

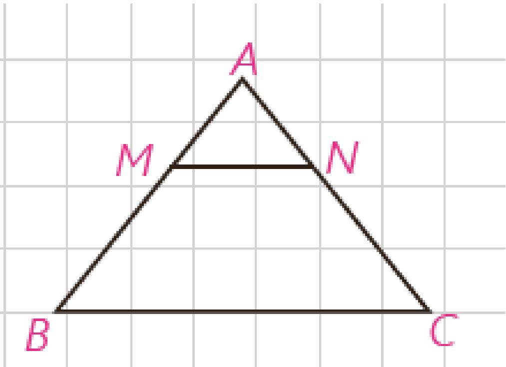
۱ـ طول های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

پاسخ :

$$2p = 15 + 12 + 10 = 37$$

$$k = \frac{2p'}{2p} = \frac{B'C'}{BC} \rightarrow \frac{2p'}{37} = \frac{10}{15} \rightarrow 2p' = \frac{74}{3}$$

۲ــ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



پاسخ :

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMN} + S_{MNCB} = S_{\Delta AMN} + 8S_{AMN} = 9S_{\Delta AMN} \quad (1)$$

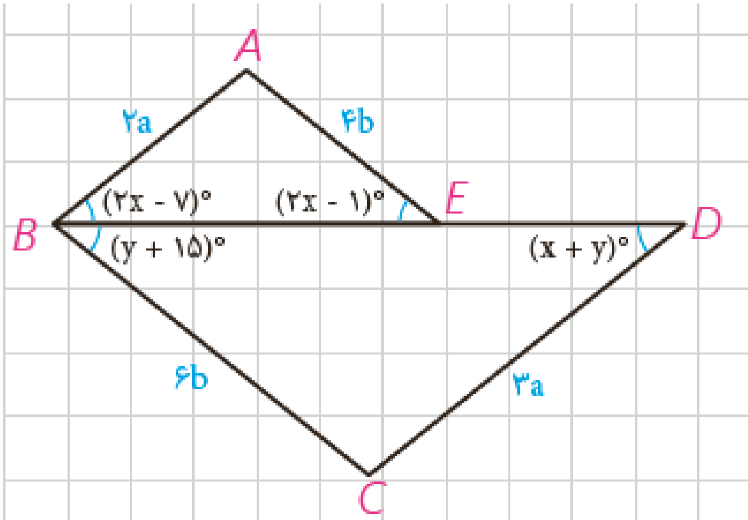
$$\Delta ABC: MN \parallel BC \to \Delta ANM \sim \Delta ABC$$

$$\xrightarrow{(1)} k^2 = \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{9} \to k = \frac{1}{3}$$

$$\to \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \to \frac{AM}{AB - AM} = \frac{1}{3-1} \to \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \to \frac{MB}{AM} = 2$$

تمرین

۳ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



پاسخ : اولاً

$$BE = 2DE \to \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3} \quad , \frac{2a}{3a} = \frac{4b}{6b} = \frac{2}{3}$$

$$\to \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3} \to \Delta ABE \sim \Delta BCD \to \begin{cases} 2x - 7^\circ = x + y \\ 2x - 1^\circ = y + 15^\circ \end{cases}$$

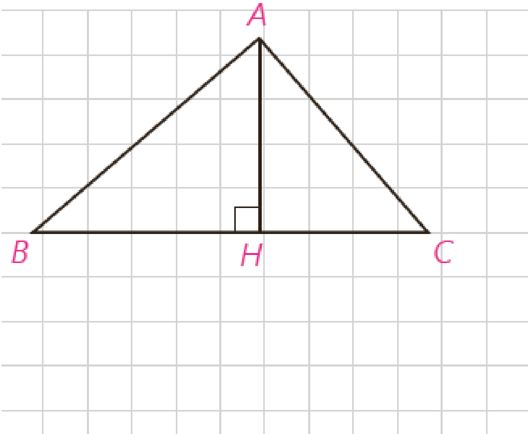
$$\to \begin{cases} x - y = 7^\circ \\ 2x - y = 16^\circ \end{cases} \to \quad x = 9^\circ \ , y = 2^\circ$$

پاسخ : ثانیاً

$$k = \frac{2}{3} \to \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین



۴ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجّه به این موضوع،

الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 , \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

پاسخ : الف

$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \rightarrow \frac{AB}{BC} = k \rightarrow \frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ACH \rightarrow \frac{AC}{BC} = k' \rightarrow \frac{S_{\Delta ACH}}{S_{\Delta ABC}} = k'^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

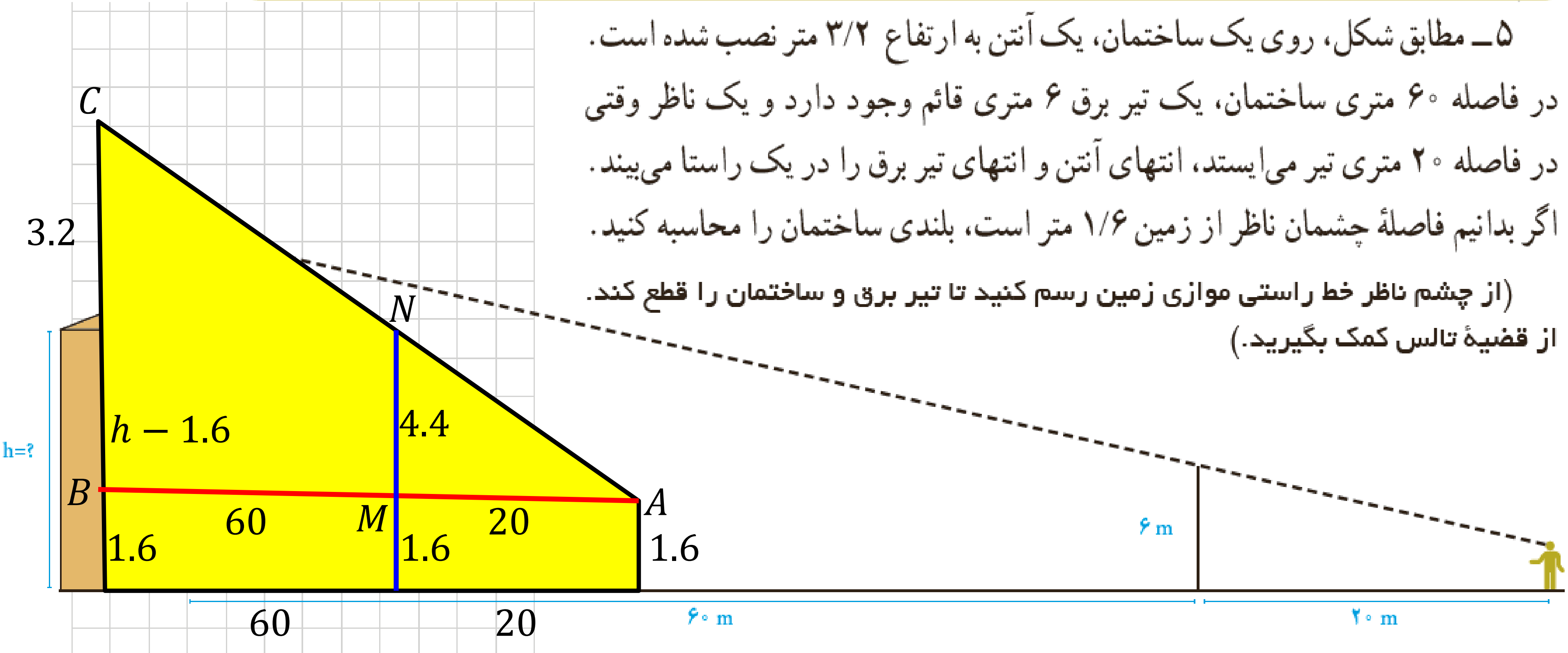
پاسخ : ثانیاً

$$\rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta ACH}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$$

$$\rightarrow \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1 \xrightarrow{\times BC^2} AB^2 + AC^2 = BC^2$$

۵ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



پاسخ :

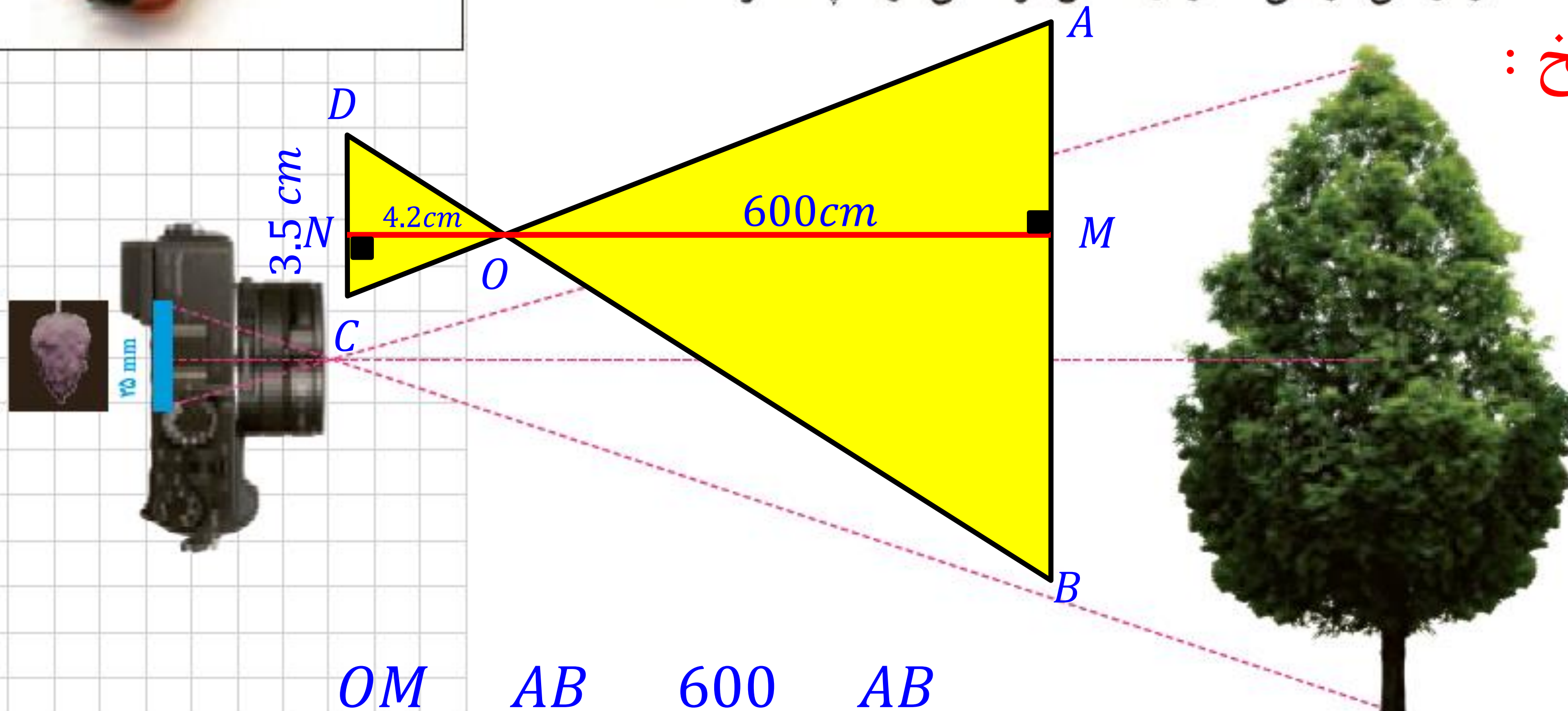
$$\Delta ABC : MN \parallel BC \rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \rightarrow \frac{4.4}{h-1.6+3.2} = \frac{20}{20+60}$$

$$\rightarrow \frac{4.4}{h+1.6} = \frac{1}{4} \rightarrow h+1.6 = 17.6 \rightarrow h = 16$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۶ــ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی[1] ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی[2]، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

پاسخ :



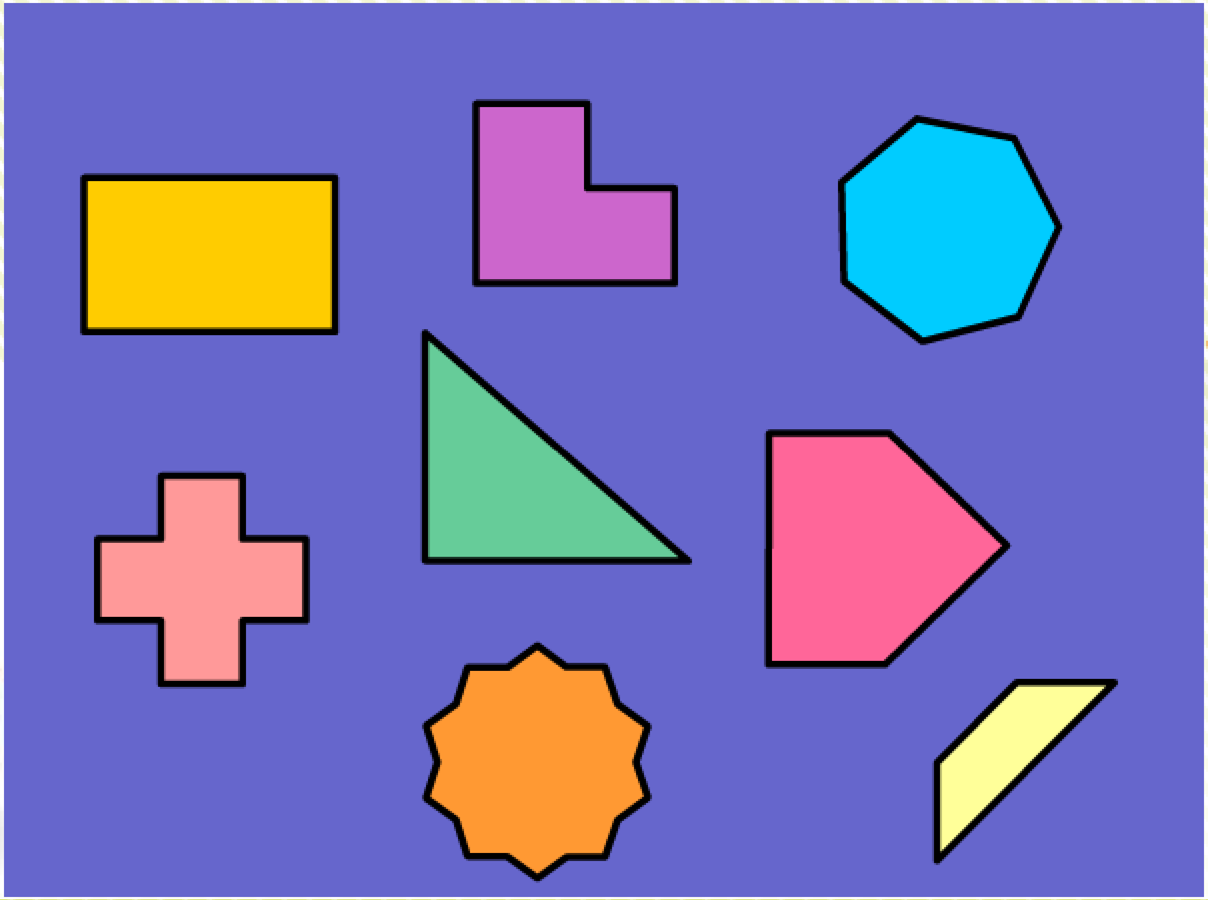
$$\Delta OAB \sim \Delta OCD \rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD} \rightarrow \frac{600}{3.5} = \frac{AB}{4.2} \rightarrow AB = 720\ cm = 7.2\ m$$

۳

فصل سوم

چند ضلعی ها

پل طبیعت، تهرا



درس اول

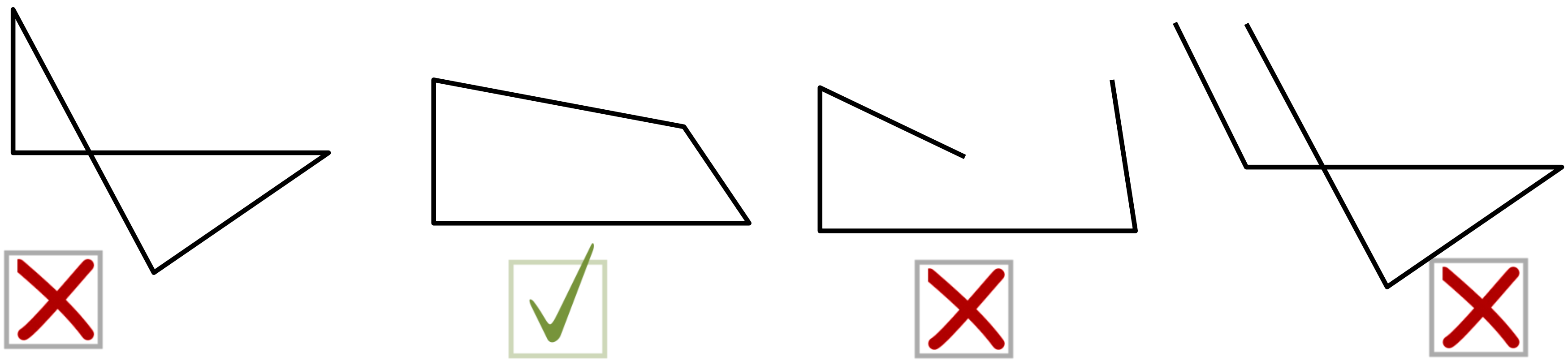
چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

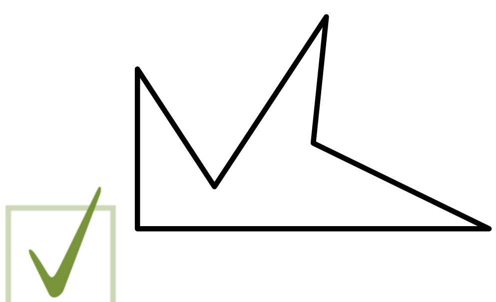
در تمام این فصل شکل‌ها در صفحه درنظر گرفته می‌شوند.

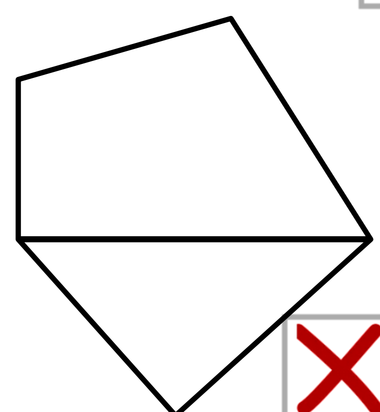
تعریف: nضلعی شکلی است شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی که:

۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

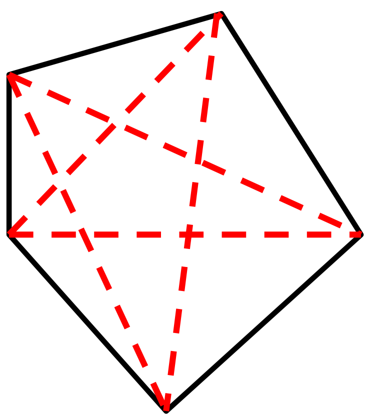




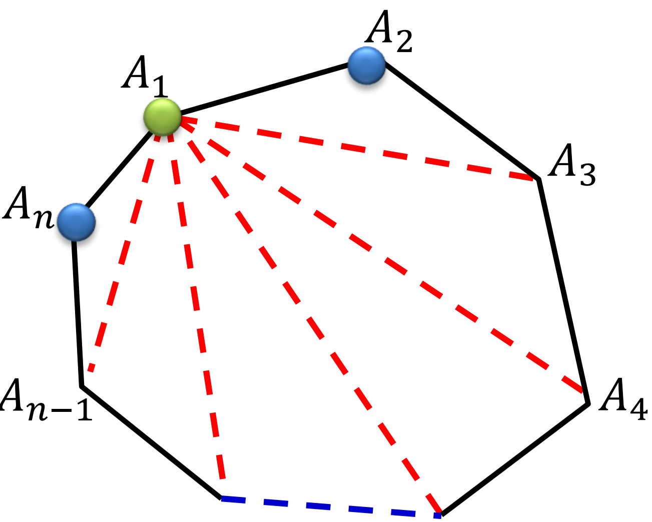


تعریف دو رأس مجاور : در هر چند ضلعی دو رأسی که در انتهای یک ضلع قرار دارند را دو رأس مجاور می نامند.

تعریف قطر چند ضلعی: در هر چند ضلعی پاره خطی که دو رأس غیر مجاور را به هم متصل می کند . قطر نامیده می شود.



قضیه: تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر است با : $\frac{n(n-3)}{2}$



اثبات: n ضلعی $A_1A_2A_3 \dots A_n$ را در نظر می گیریم . هر رأس دارای $n-3$ رأس غیر مجاور است . پس از هر رأس $n-3$ قطر می توان رسم کرد.

پس تعداد قطرهای رسم شده از n رأس باید $n(n-3)$ باشد.

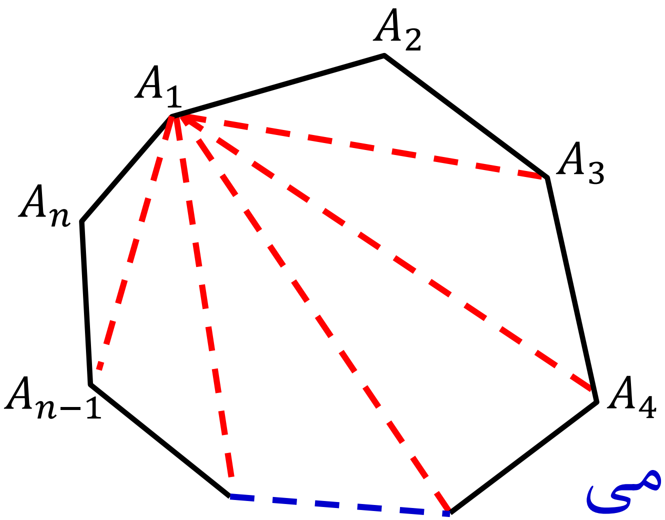
ولی هر قطر در دو رأس مشترک است . لذا در این شمارش هر قطر دو بار شمرده شده است و تعداد قطرها برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$

مثال ۱: با n نقطه که هیچ سه تای آنها در یک راستا نیستند چند پاره خط تشکیل می شود ؟

پاسخ : n نقطه که هیچ سه تای آنها در یک راستا نیستند.
می توانند رأس های یک n ضلعی باشند . لذا تعداد پاره خطهای ایجاد شده برابر است با مجموع تعداد اضلاع و تعداد قطرها ی آن :

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{2n+n^2-3n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

مثال ۲: ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با : $(n-2)180^\circ$



اثبات: n ضلعی $A_1A_2A_3 \dots A_n$ را در نظر می گیریم . تعداد مثلث های تشکیل شده از رسم قطرهای یک راس $n-2$ و مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180°است. پس مجموع زاویه های داخلی n ضلعی برابر است با :

$$(n-2)180^\circ$$

مثال ۳: تعداد قطرها و مجموع زاویه های داخلی هفده ضلعی را حساب کنید.

پاسخ : تعداد قطرها برابر است با :

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{17(17-3)}{2} = 119$$

مجموع زاویه های داخلی برابر است با :

$$(n-2) \times 180° = (17-2) \times 180° = 2700°$$

مثال ۴: یک n ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن چند درجه است ؟

پاسخ : تعداد قطرها ۹۰ است پس :

$$\frac{n(n-3)}{2}=90\rightarrow n^2-3n=180$$

$$\rightarrow n^2-3n-180=0\rightarrow (n-15)(n+12)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases} n+12=0\rightarrow n=-12 \boxed{\times} \\ n-15=0\rightarrow n=15 \boxed{\checkmark} \end{cases}$$

$$(n-2)\times 180^\circ=(15-2)\times 180^\circ=2340^\circ$$

مثال ۴: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی ۴ ضلع اضافه شود. به تعداد قطرهای آن ۴۶ قطر اضافه می شود n را حساب کنید.

پاسخ : فرض کنیم $m = n + 4$

$$\frac{m(m-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 46$$

$$\rightarrow \frac{(n+4)(n+4-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 46$$

$$\xrightarrow{\times 2} (n+4)(n+1) = n(n-3) + 92$$

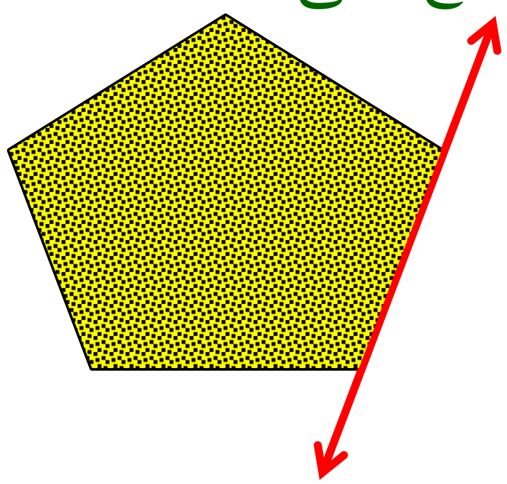
$$\rightarrow n^2 + 5n + 4 = n^2 - 3n + 92$$

$$\rightarrow 8n = 88 \rightarrow n = 11$$

تعریف چند ضلعی محدب (کوژ) : یک چند ضلعی را محدب می نامند هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع ، تمام نقاط آن چند ضلعی در یک طرف آن قرار گیرند.

چندضلعی محدب دارای سه ویژگی مهم زیر است:

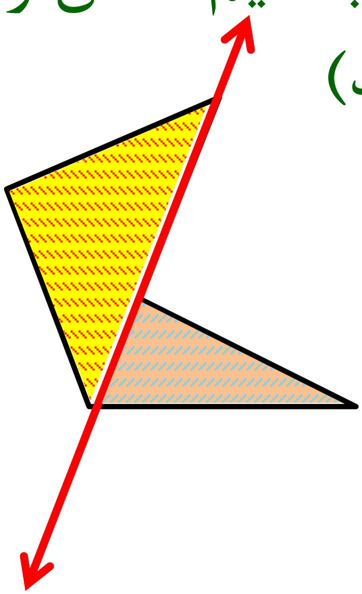
- هر زاویه داخلی این نوع چندضلعی‌ها باید کمتراز ۱۸۰ درجه باشد.
- خط واصل بین هر دو نقطه دلخواه داخل یا روی چندضلعی کاملاً داخل یا روی چندضلعی قرار داشته باشد.
- اگر یکی از اضلاع را ادامه دهیم شکل را قطع نمی کند.



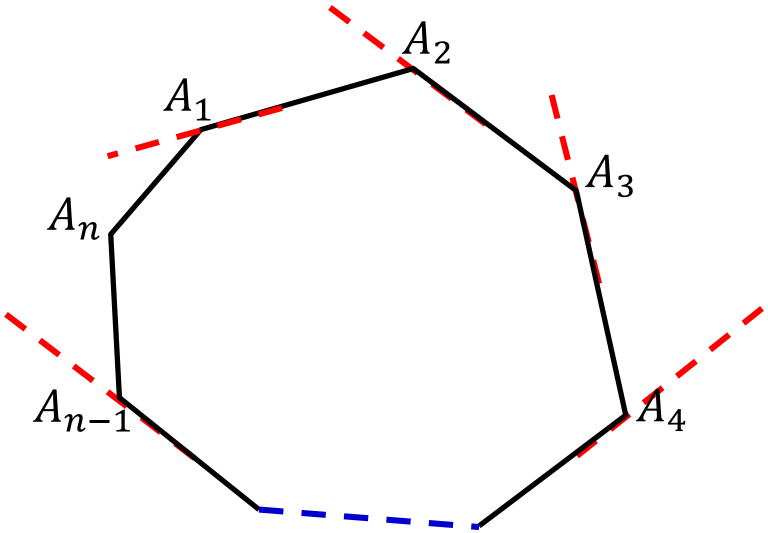
تعریف چند ضلعی مقعر (کاو) : هر چند ضلعی که محدب نباشد را مقعر می نامند.

چندضلعی محدب دارای سه ویژگی مهم زیر است:

- حداقل یکی از زاویه های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه است.
- خط واصل بین دو نقطه دلخواه از داخل چند ضلعی لزوما به طور کامل داخل چند ضلعی قرار نمی گیرد.
- حداقل یک ضلع وجود دارد که اگر آن را ادامه بدهیم شکل را به دوقسمت تقسیم می کند(شکل را قطع می کند)



مثال ۱ : ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



اثبات : می دانیم مجموع زاویه های داخلی و خارجی هر راس $180°$ است. پس مجموع کل زاویه های داخلی و خارجی n ضلعی محدب $180n$ درجه است :

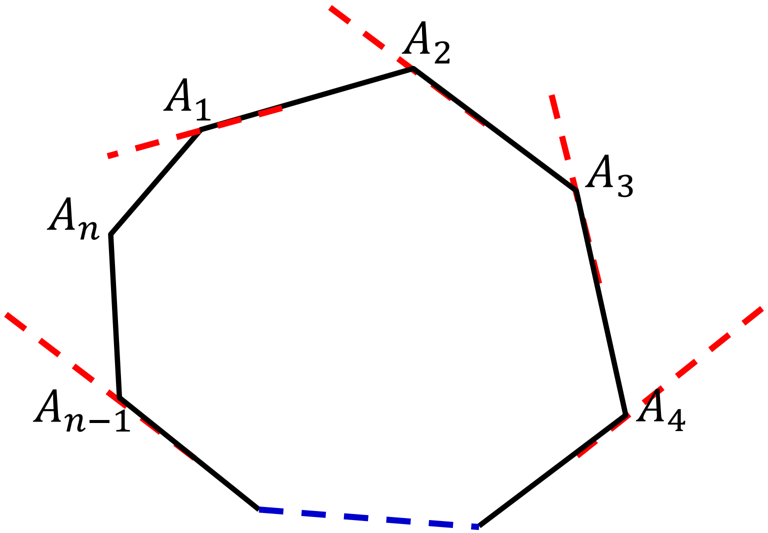
$$\text{مجموع اندازه زاویه های داخلی و خارجی} = 180°n \quad (1)$$

$$\text{مجموع اندازه زاویه های داخلی} = 180°(n-2) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \text{مجموع اندازه زاویه های خارجی} = 180°n - (n-2)180°$$

$$\text{مجموع اندازه زاویه های خارجی} = 180°n - 180°n + 630° = 360°$$

مثال ۱ : ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



اثبات : می دانیم مجموع زاویه های داخلی و خارجی هر راس $180°$ است. پس مجموع کل زاویه های داخلی و خارجی n ضلعی محدب $180n$ درجه است :

مجموع اندازه زاویه های داخلی و خارجی $= 180°n \quad (1)$

مجموع اندازه زاویه های داخلی $= 180°(n-2) \quad (2)$

$(1), (2) \rightarrow$ مجموع اندازه زاویه های خارجی $= 180°n - (n-2)180°$

مجموع اندازه زاویه های خارجی $= 180°n - 180°n + 630° = 360°$

مثال ۲ : ثابت کنید هر n ضلعی محدب ، نمی تواند بیش از سه زاویه ی تند (حاده) دارد.

اثبات(برهان خلف) : فرض کنیم در یک n ضلعی محدب زاویه های داخلی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ و $\hat{C}_1$ و $\hat{D}_1$ حاده باشند.
اگر زاویه های $\hat{A}_2$ و $\hat{B}_2$ و $\hat{C}_2$ و $\hat{D}_2$ مکمل های این چهار زاویه باشند:

$$\hat{A}_1 < 90° \rightarrow \hat{A}_2 > 90° \quad , \quad \hat{B}_1 < 90° \rightarrow \hat{B}_2 > 90°$$

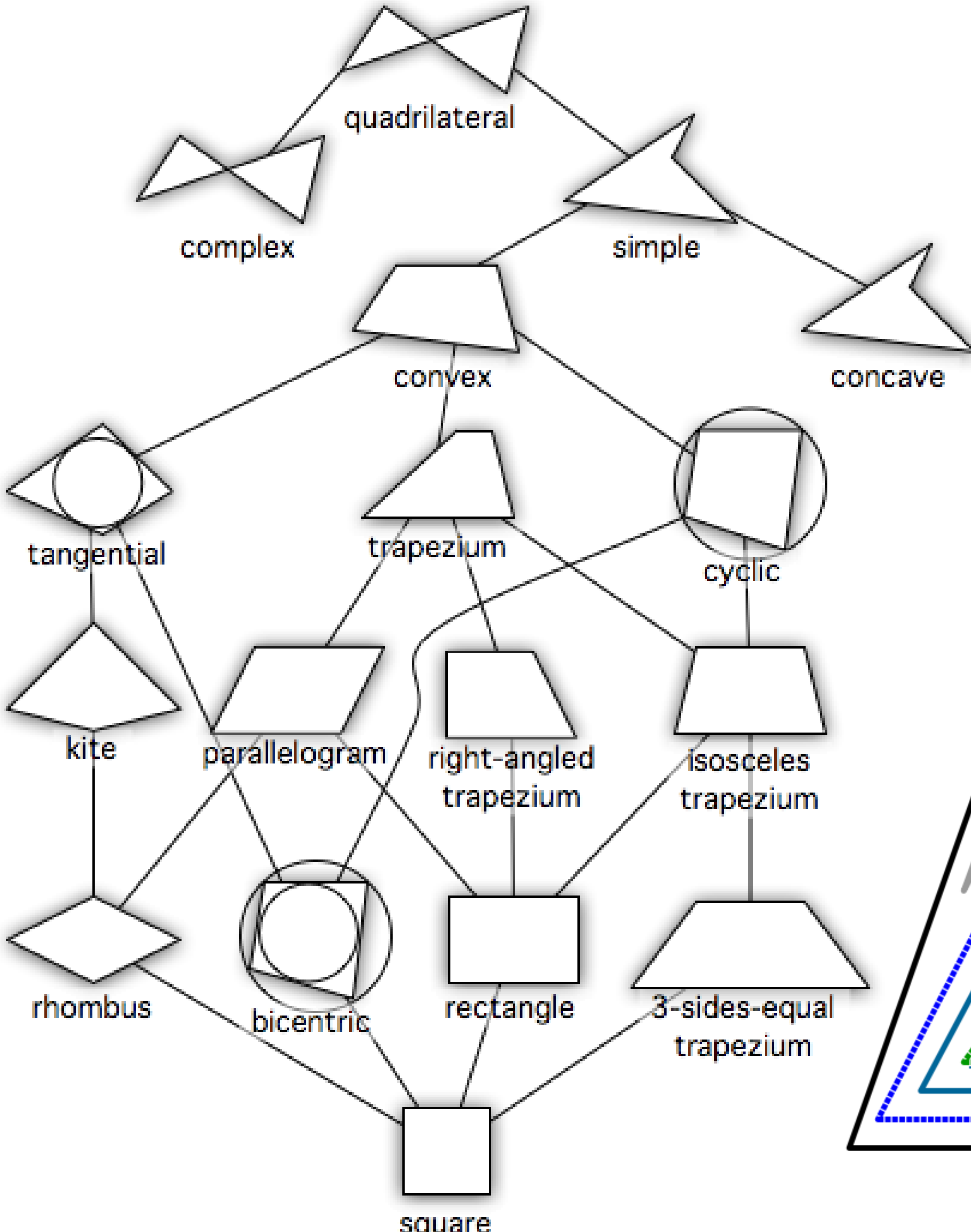
$$\hat{C}_1 < 90° \rightarrow \hat{C}_2 > 90° \quad , \quad \hat{D}_1 < 90° \rightarrow \hat{C}_2 > 90°$$

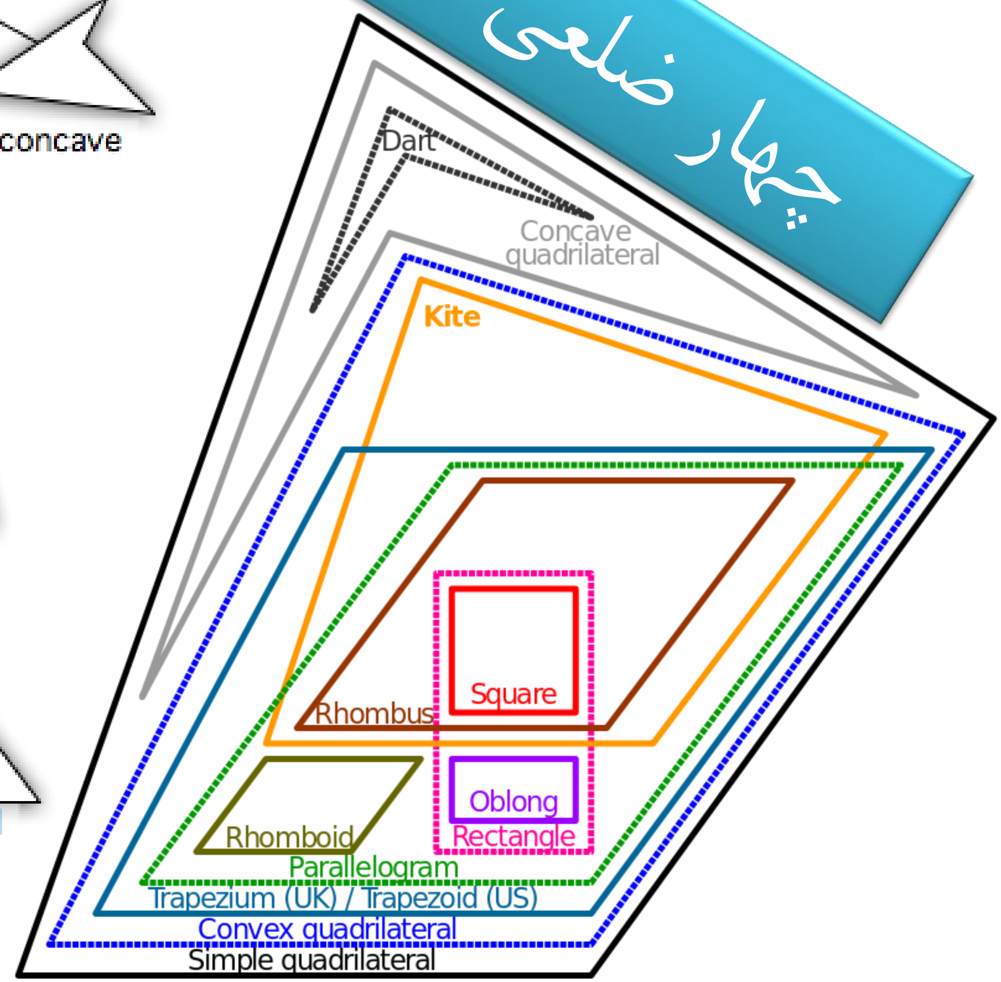
$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 > 4 \times 90°$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 > 360°$$

ولی می دانیم مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب $360°$ است . و این یک تناقض است لذا درستی حکم ثابت می شود.

چهار ضلعی ها


quadrilateral
complex
simple
convex
concave
tangential
trapezium
cyclic
kite
parallelogram
right-angled trapezium
isosceles trapezium
rhombus
bicentric
rectangle
3-sides-equal trapezium
square


Dart
Concave quadrilateral
Kite
Rhombus
Square
Oblong
Rhomboid
Rectangle
Parallelogram
Trapezium (UK) / Trapezoid (US)
Convex quadrilateral
Simple quadrilateral

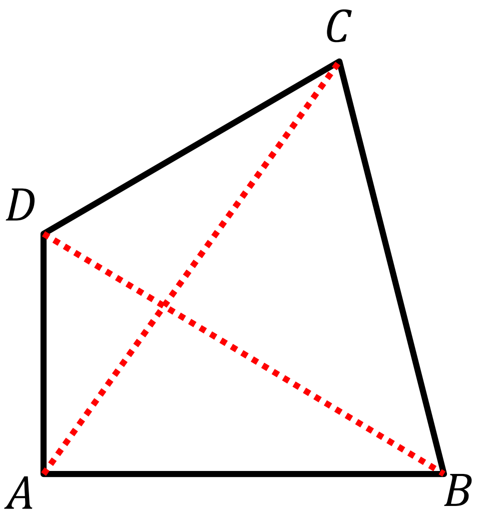
ویژگی های مشترک چهار ضلعی ها

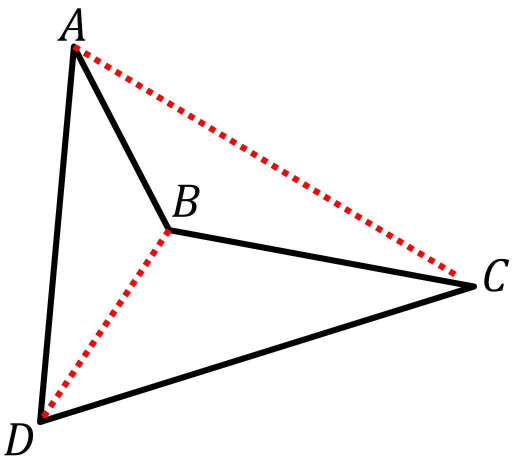
مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است.

در هر چهار ضلعی دو ضلعی که در یک رأس مشترک اند را دو ضلع مجاور می نامند.

در هر چهار ضلعی دو ضلعی که در هیچ رأس مشترک نیستند را دو ضلع مقابل می نامند.

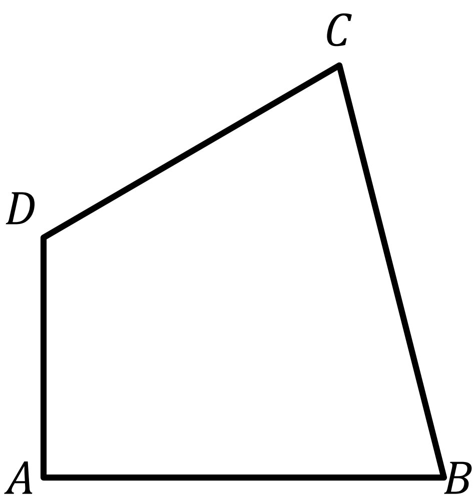
هر چهار ضلعی دو قطر دارد

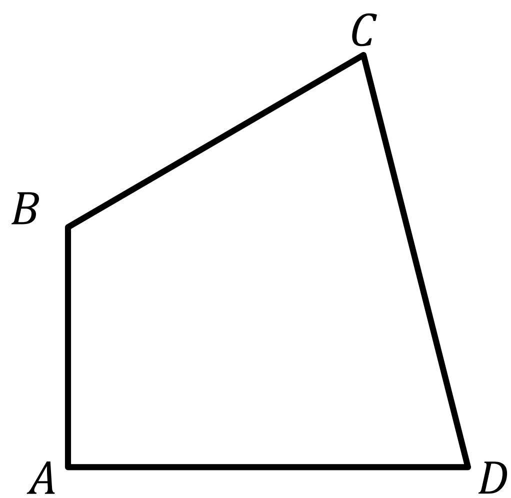


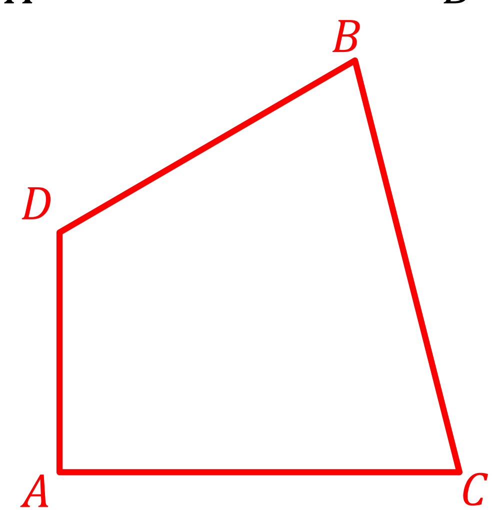


برای نامگذاری رأس های یک چهار ضلعی کافی است از یک رأس دلخواه شروع کرده و در جهت عقربه های ساعت یا در خلاف آن به ترتیب نامِ چهار ضلعی ، رأس ها را نامگذاری کنیم.

مثال : چهار ضلعی ABCD به یکی از دو صورت زیر نامگذاری می شود :





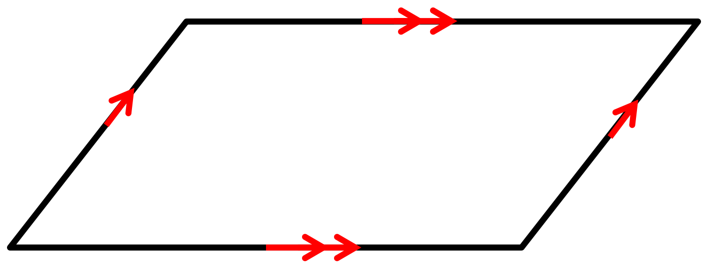


ولی چهارضلعی مقابل ACBD یا ADBC نام دارد.

چهارضلعی های پر کاربرد

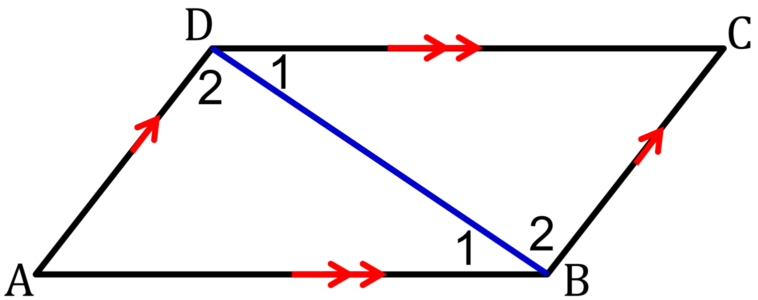
۱- متوازی الاضلاع

چهار ضلعی است که هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.



نتیجه : هر متوازی الاضلاع یک چهار ضلعی محدب است .

قضیه : در هر متوازی الاضلاع ، هر دو ضلع مقابل هم اندازه اند.



فرض : AB ∥ CD ,AD ∥ BC

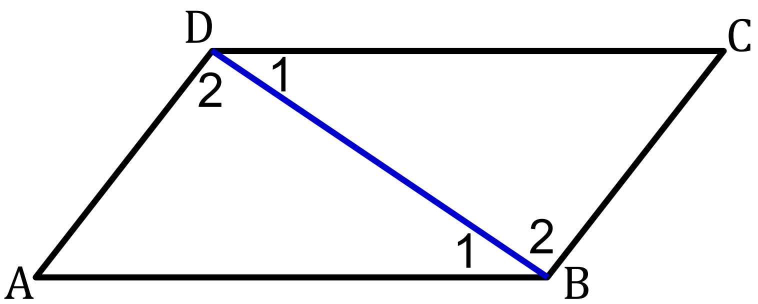
حکم : AB = CD ,AD = BC

اثبات : قطر BD را رسم می کنیم :

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } \mathrm{BD}\,,\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ BD = BD \\ \text{مورب } \mathrm{BD}\,,\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC} \rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BCD$$

$$\rightarrow AB = CD, AD = BC$$

عکس قضیه : اگر در یک چهار ضلعی ، ضلع های مقابل دو به دو مساوی باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



فرض : $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}\ ,\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$

حکم : $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}\ ,\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$

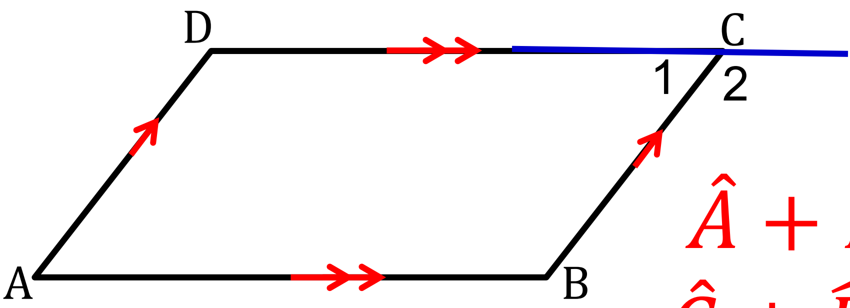
اثبات : قطر BD را رسم می کنیم :

$$\left.\begin{matrix} AB = CD \\ BD = BD \\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC} \end{matrix}\right\} \to \Delta ABD \cong \Delta BCD \to \widehat{B_1} = \widehat{D_1}\ , \widehat{B_2} = \widehat{D_2}$$

$$\to \mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}\ , \mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$$

قضیه دو شرطی: یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است . اگر وتنها اگر اضلاع مقابل آن دو به دو مساوی باشند.

قضیه : در هر متوازی الاضلاع ، هر دو زاویه مجاور ، مکمل اند.



فرض : AB ∥ CD ,AD ∥ BC

حکم : $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$,$\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

$\hat{C}+\hat{D}=180^\circ$ $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$,

اثبات : ضلع CD را امتداد می دهیم :

مورب BC , AB ∥ CD $\rightarrow \hat{B}=\hat{C}_2$

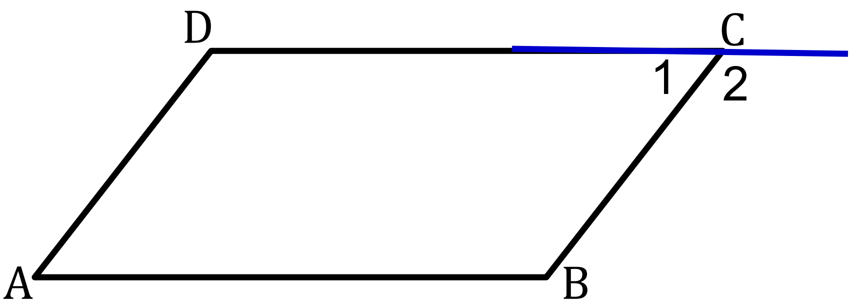
$\hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ$

$\rightarrow \hat{C}_1+\hat{B}=180^\circ$

عکس قضیه : اگر در یک چهار ضلعی ، هر دو زاویه مجاور ، مکمل یکدیگر باشند . آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض : $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ ,\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

$\hat{C}+\widehat{D}=180^\circ \ \ \hat{A}+\widehat{D}=180^\circ,$



حکم : $AB \parallel CD ,AD \parallel BC$

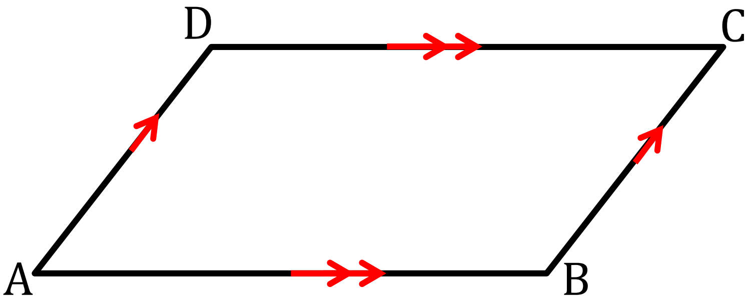
اثبات : ضلع CD را امتداد می دهیم :

$$\left.\begin{matrix}\hat{C}_1+\hat{B}=180^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ\end{matrix}\right\}\rightarrow \hat{B}=\hat{C}_2\rightarrow AB \parallel CD$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{C}_1+\widehat{D}=180^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ\end{matrix}\right\}\rightarrow \widehat{D}=\hat{C}_2\rightarrow AD \parallel BC$$

قضیه دو شرطی : یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است. اگر و تنها اگر، هر دو زاویه مجاور آن، مکمل یکدیگر باشند .

قضیه : در هر متوازی الاضلاع ، هر دو زاویه مقابل ، مساوی اند.



فرض : AB ∥ CD ,AD ∥ BC

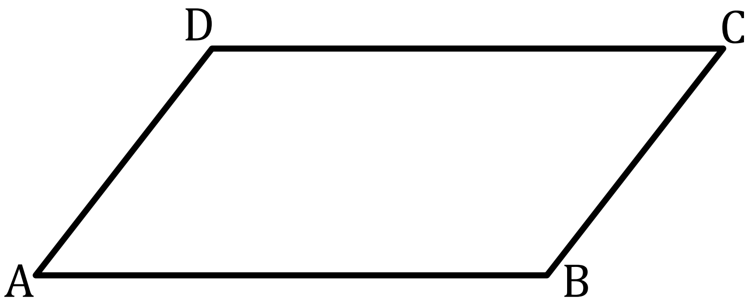
حکم : $\hat{A} = \hat{C}$,$\hat{B} = \hat{D}$

اثبات : چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است پس :

$$\hat{A} + \hat{B} = 180° , \hat{B} + \hat{C} = 180° \quad \rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 180° , \hat{A} + \hat{D} = 180° \quad \rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی ، هر دو زاویه مقابل ، مساوی باشند . آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



فرض : $\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \widehat{D}$

حکم : $AB \parallel CD , AD \parallel BC$

اثبات : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است پس :

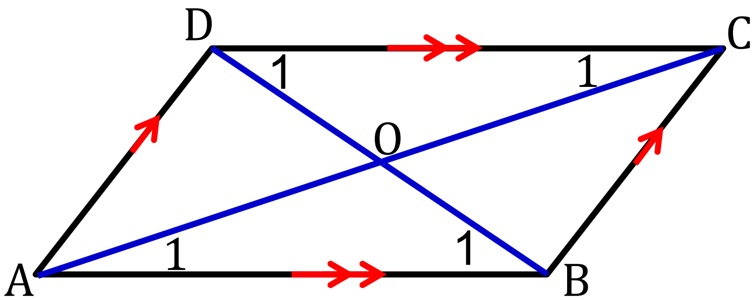
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \widehat{D} = 360° \xrightarrow{\hat{A}=\hat{C}, \hat{B}=\widehat{D}} 2\hat{A} + 2\hat{B} = 360° \to \hat{A} + \hat{B} = 180°$$

به روشی مشابه ثابت می شود :

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \widehat{D} = \hat{A} + \widehat{D} = 180° \to AB \parallel CD , AD \parallel BC$$

قضیه دو شرطی : یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است. اگر و تنها اگر، هر دو زاویه مقابل آن، مساوی یکدیگر باشند .

قضیه : در هر متوازی الاضلاع ، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.



فرض : $AB \parallel CD , AD \parallel BC$

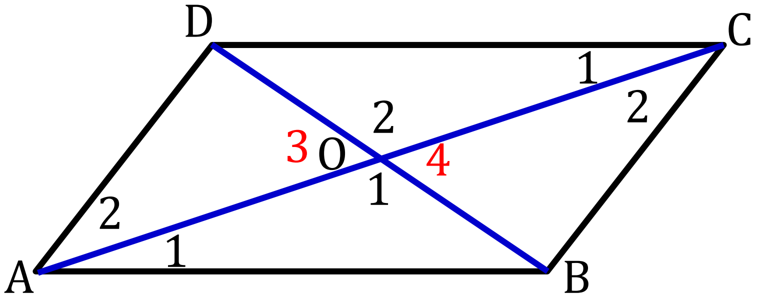
حکم : $OA = OC , OB = OD$

اثبات : فرض کنیم قطرهای AC , BD همدیگر را در O قطع می کنند .

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD , AB \parallel CD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \\ \text{مورب } AC , AB \parallel CD \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD$$

$$\rightarrow OA = OC, OB = OD$$

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی، قطرها یکدیگر را نصف کنند. آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



فرض : $OA = OC , OB = OD$

حکم : $AB \parallel CD , AD \parallel BC$

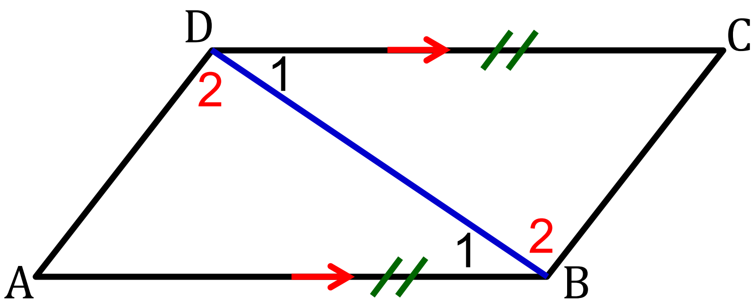
اثبات : فرض کنیم قطرهای AC , BD همدیگر را در O قطع می کنند .

$$\left.\begin{array}{c} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \mathrm{OB} = \mathrm{OD} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \rightarrow \mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$$

$$\left.\begin{array}{c} OA = OC \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \\ \mathrm{OD} = \mathrm{OB} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OBC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \rightarrow \mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$$

قضیه دو شرطی: یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است . اگر و تنها اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.

قضیه : اگر دو ضلع از یک چهار ضلعی ، موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد.



فرض : $AB \parallel CD , AB = CD$

حکم : $AD \parallel BC$

اثبات : قطر BD را رسم می کنیم :

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD , AB \parallel CD \to \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ BD = BD \\ AB = CD \end{array}\right\} \to \Delta ABD \cong \Delta BCD$$

$$\to \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \to AD \parallel BC$$

چهارضلعی های پر کاربرد

۲- مستطیل

چهار ضلعی است که سه زاویه قائمه داشته باشد.

نتیجه ۱ : هر مستطیل چهار زاویه قائمه دارد .

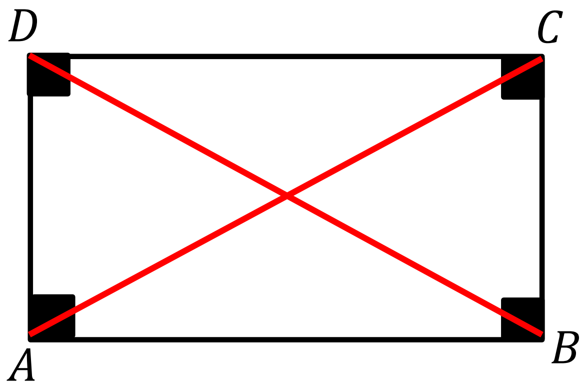
نتیجه ۲ : هر مستطیل ، نوعی متوازی الاضلاع است.

نتیجه ۳ : در هر مستطیل ، اضلاع مقابل موازی و مساوی اند.

نتیجه ۴ : در هر مستطیل ، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

نتیجه ۵ : هر متوازی الاضلاعی که یک زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است

قضیه : قطرهای هر مستطیل هم اندازه اند.



فرض : چهار ضلعی ABCD مستطیل است.

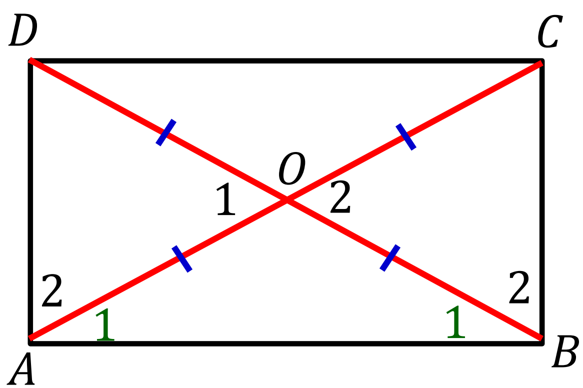
حکم : $AC = BD$

اثبات : در دو مثلث ABC و ABD داریم :

$$\left.\begin{array}{c} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} = 90° \\ AB = AB \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \rightarrow AC = BD$$

آیا عکس این قضیه هم صحیح است ؟ یعنی اگر قطرهای یک چهار ضلعی مساوی باشند. آن چهار ضلعی ، مستطیل است ؟

قضیه : اگر قطرهای یک چهار ضلعی هم اندازه باشند و یکدیگر را نصف کنند . آن چهار ضلعی مستطیل است.



فرض : $OA = OB = OC = OD$

حکم :چهار ضلعی ABCD مستطیل است.

اثبات : $\mathrm{OA} = \mathrm{OC}, \mathrm{OB} = \mathrm{OD}$ پس چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است لذا : $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{C}}, \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{D}}$ (1)

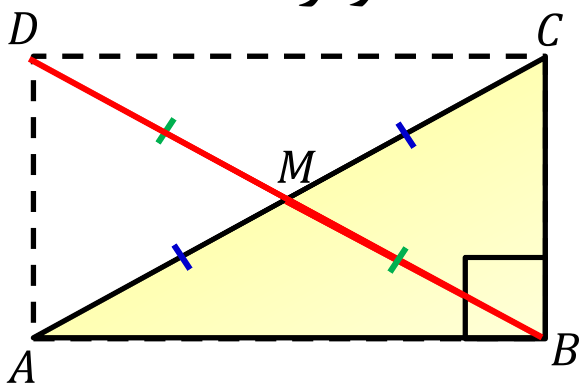
$$\left.\begin{array}{c} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OD = OB \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OBC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \quad (2)$$

$$\Delta OAB: OA = OB \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (3)$$

$$(2),(3) \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} \quad (4)$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \widehat{D} = 360° \xrightarrow{(1),(4)} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \widehat{D} = 90°$$

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه ، میانه وارد بر وتر ، نصف وتر است.



فرض :

$$\Delta ABC:\ \hat{B} = 90° , AM = MC = \frac{AC}{2}$$

حکم : $BM = \frac{AC}{2}$

اثبات : میانه BM را به اندازه ی خودش امتداد داده تا به نقطه D برسیم.

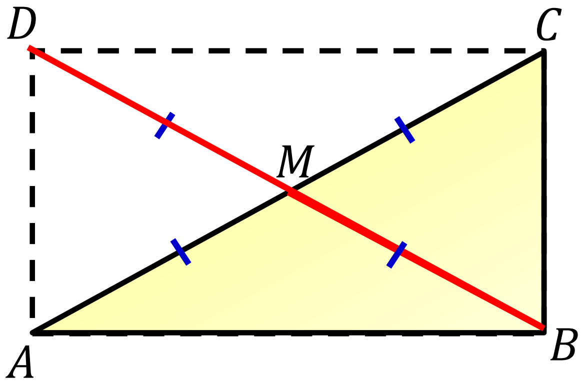
چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است زیرا :

$$AM = MC\ , BM = MD$$

از طرف دیگر $\hat{B} = 90°$ پس ABCD مستطیل است . در نتیجه :

$$BD = AC \rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \rightarrow BM = \frac{AC}{2}$$

عکس قضیه : اگر در مثلثی ، میانه وارد بر یکی از اضلاع ، نصف آن ضلع باشد . آنگاه زاویه روبرو به آن ضلع قائمه است.



فرض : $\Delta ABC: AM = MC = BM = \frac{AC}{2}$

حکم : $\hat{B} = 90°$

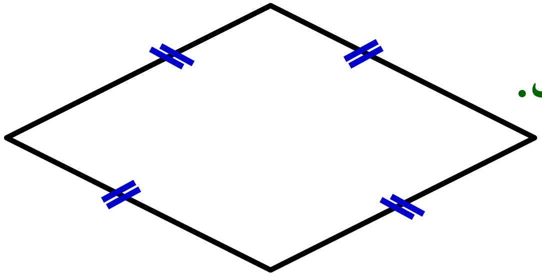
اثبات : میانه BM را به اندازه ی خودش امتداد داده تا به نقطه D برسیم.

$$AM = MC = BM = MD \rightarrow AC = BD$$

پس در چهار ضلعی ABCD قطرها مساوی اند و یکدیگر را نصف می کنند . لذا این چهار ضلعی مستطیل است و $\hat{B} = 90°$

چهارضلعی های پر کاربرد

۳- لوزی



چهار ضلعی است که تمام اضلاع آن ، هم اندازه اند.

نتیجه ۱ : هر لوزی نوعی متوازی الاضلاع است.

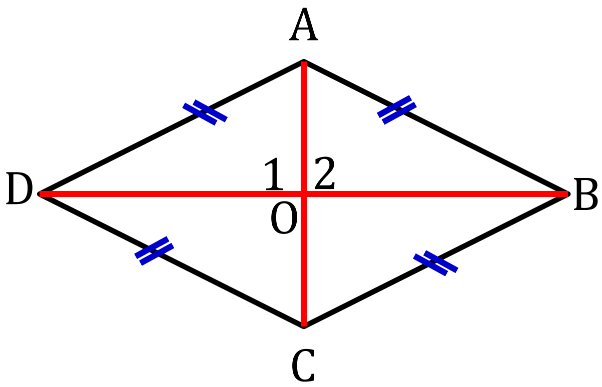
نتیجه ۲ : در هر لوزی ، زاویه های مقابل مساوی اند.

نتیجه ۳ : در هر لوزی ، زاویه های مجاور مکمل اند.

نتیجه ۴ : در هر مستطیل ، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

نتیجه ۵ : هر متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاور مساوی داشته باشد لوزی است.

قضیه : در هر لوزی ، قطرها عمود منصف یکدیگرند



فرض : چهار ضلعی ABCD لوزی است .

حکم : AC و BD عمود منصف یکدیگرند.

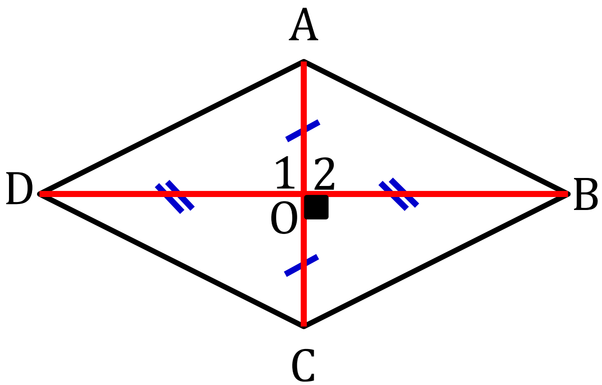
اثبات : هر لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس : $OA = OC , OB = OD$

از طرف دیگر در دو مثلث OAB و OAD :

$$\left.\begin{array}{l} OB = OD \\ AB = AD \\ OA = OA \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OAB \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90°$$

$$\rightarrow AC \perp BD$$

عکس قضیه : هر چهارضلعی که قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند . لوزی است



فرض : AC و BD عمود منصف یکدیگرند.

حکم : چهار ضلعی ABCD لوزی است .

اثبات : در دو مثلث OAB و OAD :

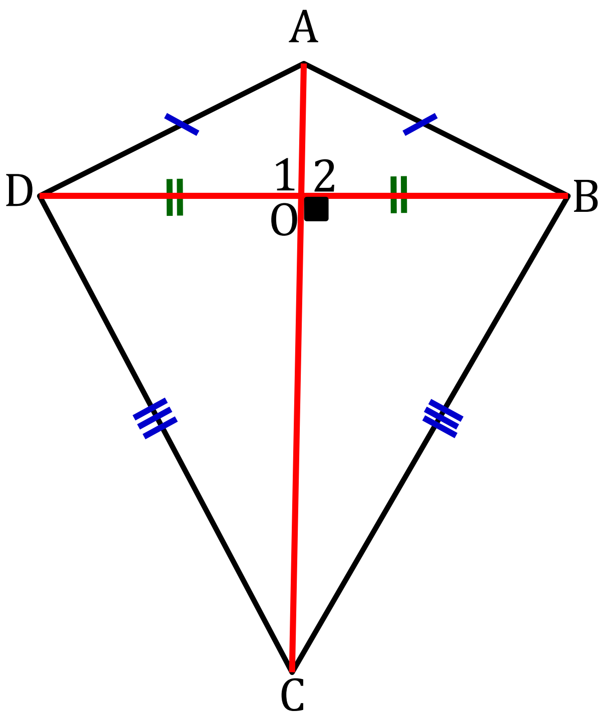
$$\left.\begin{array}{c} OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \\ OA = OA \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OAB$$

به روش مشابه ثابت می شود :

$$\Delta OAB \cong \Delta OBC \cong \Delta OCD \cong \Delta OAD$$

$$\rightarrow AB = BC = CD = AD$$

چهارضلعی های پر کاربرد



۴- کایت

هر چهارضلعی محدب به جز لوزی که داری دو جفت ضلع مجاورِ مساوی باشد را کایت می نامند.

نتیجه ۱-کایت متوازی الاضلاع نیست

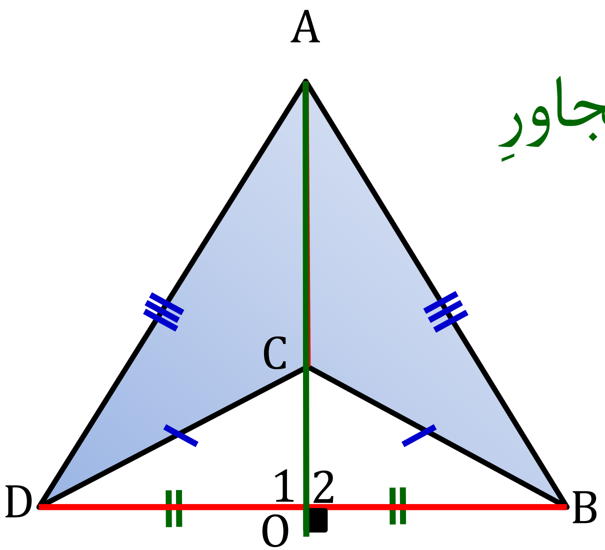
نتیجه ۲-در کایت فقط یکی از قطرها عمود منصف دیگری است.

نتیجه ۳-در کایت قطرها همدیگر را نصف نمی کنند.

چهارضلعی های پر کاربرد

۵- دارت

هر چهارضلعی مقعر که داری دو جفت ضلع مجاورِ مساوی باشد را دارت می نامند.

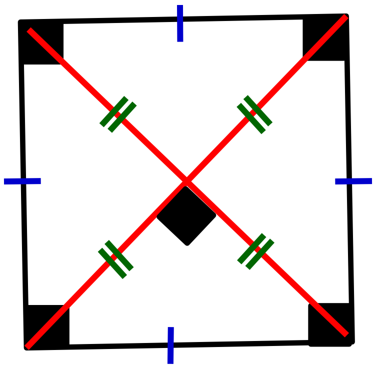


نتیجه ۱-دارت متوازی الاضلاع نیست

نتیجه ۲-در دارت فقط یکی از قطرها عمود منصف دیگری است.

نتیجه ۳-در دارت قطرها همدیگر را نصف نمی کنند.

چهارضلعی های پر کاربرد



۶- مربع

چهار ضلعی است که تمام اضلاع آن ، هم اندازه اند.
و تمام زاویه های آن قائمه باشند.

نتیجه ۱ : هر مربع نوعی متوازی الاضلاع است.

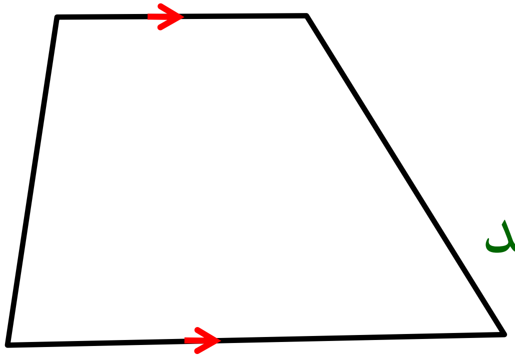
نتیجه ۲ : هر مربع نوعی مستطیل است.

نتیجه ۳ : هر مربع نوعی لوزی است.

نتیجه ۴ : در هر مربع ، قطرها مساوی اند ویکدیگر را نصف می کنند.

نتیجه ۵ : در هر مربع ، قطرها عمود منصف یکدیگرند.

چهارضلعی های پر کاربرد



۷- ذوزنقه

چهار ضلعی است که فقط دو ضلع موازی داشته باشد

یادآوری ۱ : در هر ذوزنقه دو ضلع موازی را قاعده می نامند

یادآوری ۲ : در هر ذوزنقه دو ضلع غیر موازی را ساق می نامند

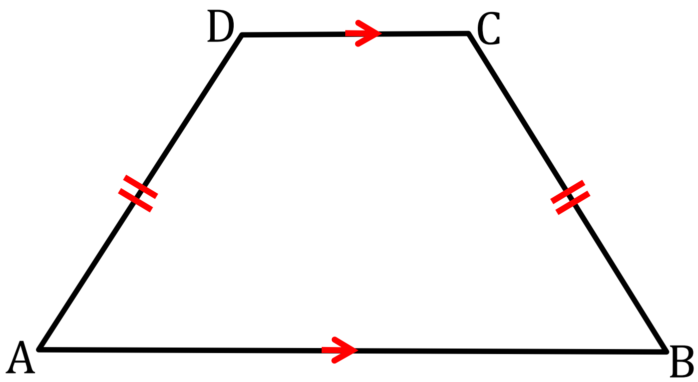
نتیجه ۱ : ذوزنقه نوعی متوازی الاضلاع نیست.

نتیجه ۲ : در هر ذورنقه زاویه های مجاور هر ساق مکمل یکدیگرند.

چهارضلعی های پر کاربرد

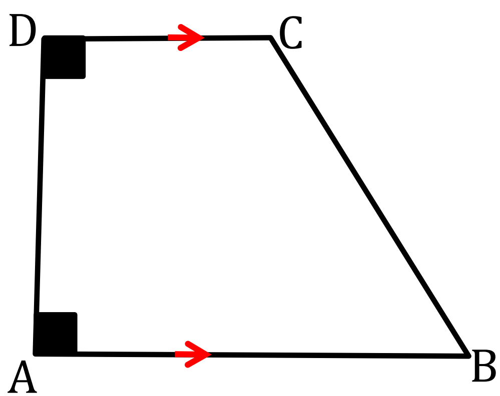
ذوزنقه های خاص

۱- ذوزنقه متساوی الساقین



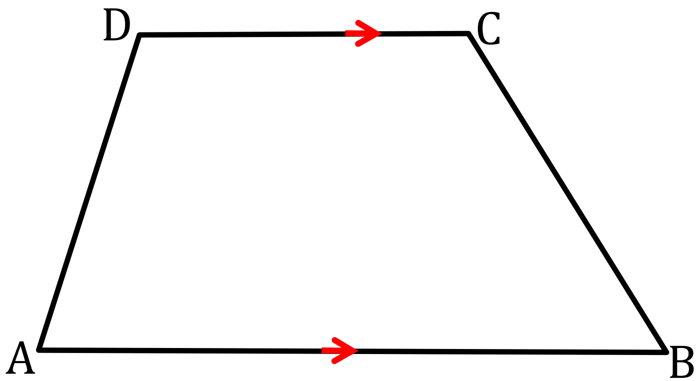
$$AB \parallel CD, AD \nparallel BC, AD = BC$$

۲- ذوزنقه قائم الزاویه



$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}, \mathrm{AD} \nparallel \mathrm{BC}, \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} = 90°$$

قضیه : در هر ذوزنقه ، زاویه های مجاور هر ساق ، مکمل یکدیگرند.



فرض : $AB \parallel CD , AD \nparallel BC$

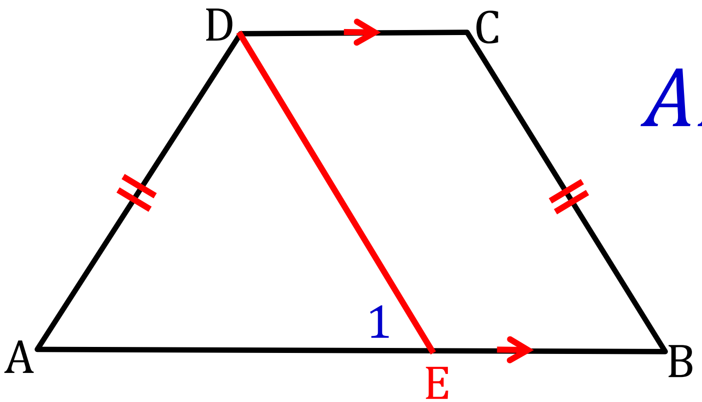
حکم : $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$, $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

اثبات :

مورب $AD\, , AB \parallel CD \rightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

مورب $BC\, , AB \parallel CD \rightarrow \hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

قضیه : در هر ذوزنقه متساوی الساقین ، زاویه های مجاور هر قاعده ، مساوی یکدیگرند.



فرض : $AB \parallel CD, AD \nparallel BC, AD = BC$

حکم : $\hat{A} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{D}$

اثبات : از رأس D خطی موازی ساق BC رسم نموده تا قاعده AB را در نقطه E قطع کند.

$$BC \parallel DE, BE \parallel CD \rightarrow BC = DE \quad (1)$$

$$\text{فرض} \rightarrow AD = BC \xRightarrow{(1)} AD = DE \rightarrow \hat{A} = \hat{E}_1 \quad (2)$$

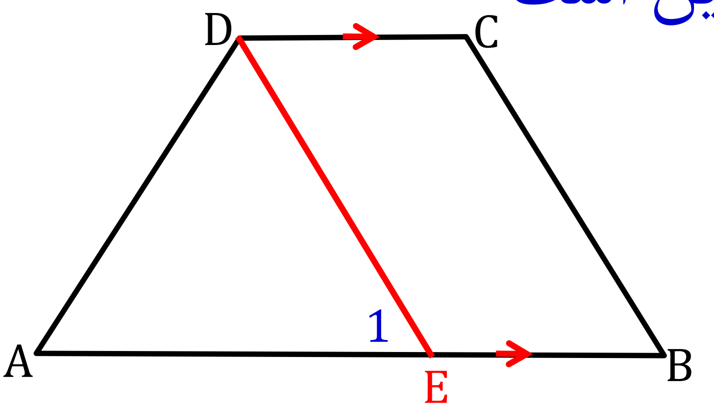
$$\text{موربAB}, BE \parallel CD \rightarrow \hat{B} = \hat{E}_1 \quad (3)$$

$$(2),(3) \rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

$$\rightarrow 180° - \hat{A} = 180° - \hat{B} \rightarrow \hat{C} = \hat{D}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

عکس قضیه : اگر در یک ذوزنقه ، زاویه های مجاور یک قاعده ، مساوی یکدیگر باشند . آنگاه آن ذوزنقه متساوی الساقین است



فرض : $AB \parallel CD, AD \nparallel BC, \hat{A} = \hat{B}$

حکم : $AD = BC$

اثبات : از رأس D خطی موازی ساق BC رسم نموده تا قاعده AB را در نقطه E قطع کند.

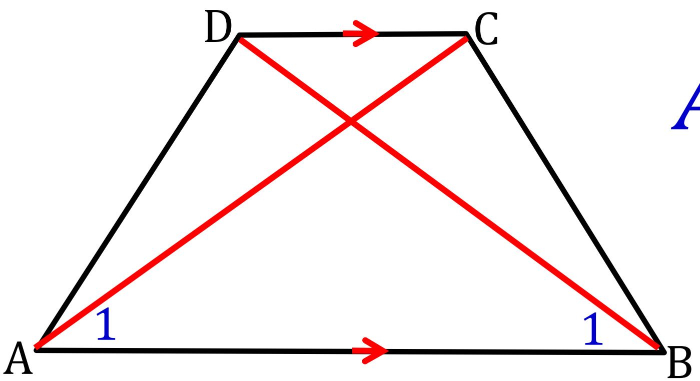
$$BC \parallel DE, BE \parallel CD \rightarrow BC = DE \quad (1)$$

$$\text{مورب } AB, BE \parallel CD \rightarrow \hat{B} = \hat{E}_1 \quad (2)$$

$$\text{فرض} \rightarrow \hat{A} = \hat{B} \xRightarrow{(2)} \hat{A} = \hat{E}_1 \rightarrow AD = DE \quad (3)$$

$$(3), (1) \rightarrow AD = BC$$

قضیه : در هر ذوزنقه متساوی الساقین ، قطرها مساوی اند.



فرض : $AB \parallel CD, AD \nparallel BC, AD = BC$

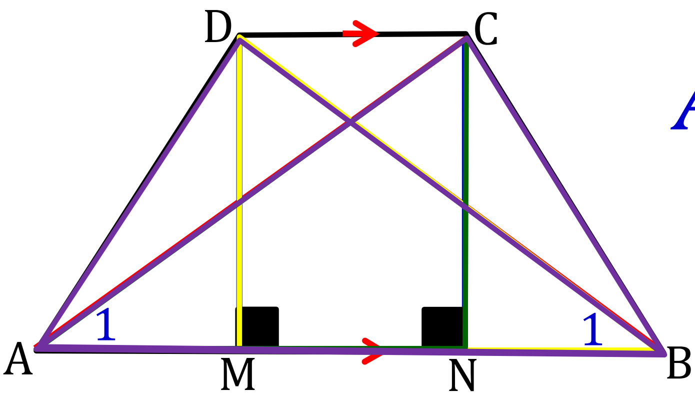
حکم : $AC = BD$

اثبات : ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است پس :

$$AD = BC \rightarrow \hat{A} = \hat{B} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} AD = BC \\ (1) \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \\ AB = AB \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABD \cong \Delta ABC \rightarrow AC = BD$$

قضیه : اگر در یک ذوزنقه ، قطرها مساوی باشند . آن ذوزنقه متساوی الساقین است .



فرض : $AB \parallel CD , AD \nparallel BC , AC = BD$

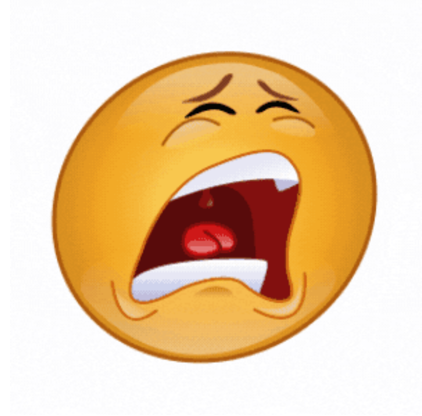
حکم : $AD = BC$

اثبات : عمودهای DM و CN را بر قاعده AB وارد می کنیم .

$$AB \parallel CD \rightarrow DM = CN \quad (1)$$

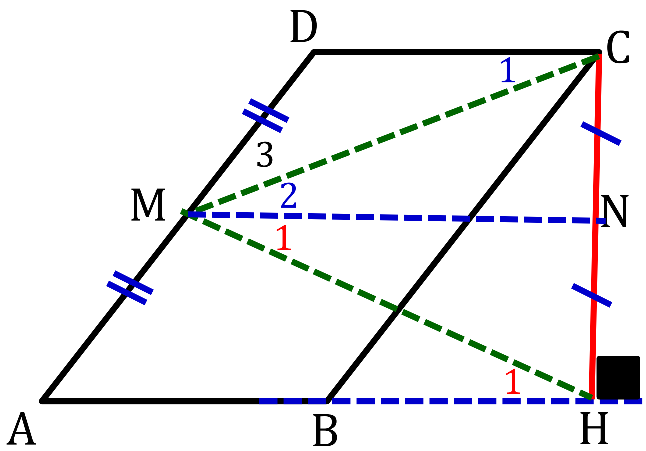
$$\left.\begin{array}{r} AC = BD \\ (1) \rightarrow DM = CN \\ \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ACN \cong \Delta BDM \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AB = AB \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \rightarrow AD = BC$$



عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال ۱ : در متوازی الاضلاع ABCD زاویه A حاده و $BC = 2AB$ و CH ارتفاع وارد بر AB است. اگر M وسط ضلع AD باشد. ثابت کنید : $D\widehat{M}H = 3A\widehat{H}M$



فرض : AB ∥ CD ,AD ∥ BC

$CH \perp AB$, $BC = 2AB, AM = MD$

حکم: $D\widehat{M}H = 3A\widehat{H}M$

اثبات : فرض کنیم N وسط ارتفاع CH باشد در این صورت

پاره خط MN وسطهای دو ساق ذوزنقه AHCD را به هم متصل می کند لذا : MN ∥ AH

$\rightarrow MN \parallel AH, AH \perp CH \rightarrow MN \perp CH$

پس MN عمود منصف پاره خط CH است در نتیجه : $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \quad (1)$

$MH, MN \parallel AH \rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{H}_1$ (2)مورب, $MC, MN \parallel CD \rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{C}_1$ (3)مورب

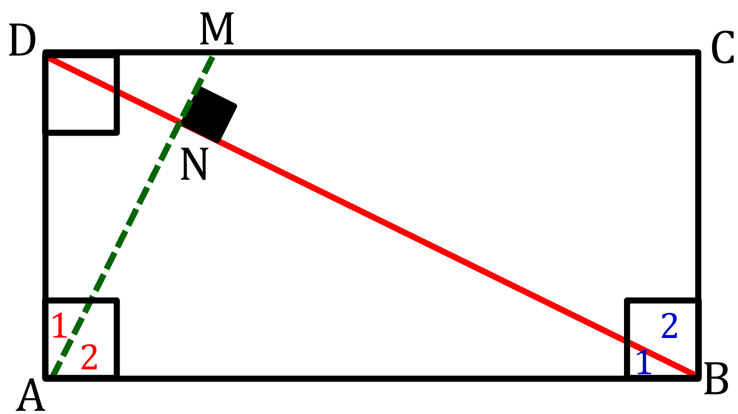
$BC = 2AB \rightarrow AD = 2CD \rightarrow 2DM = 2CD \rightarrow DM = CD \rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{M}_3 \ (4)$

$(1), (2), (3), (4) \rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3 = \widehat{H}_1 \rightarrow D\widehat{M}H = 3A\widehat{H}M$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال ۲ : طول ضلع AB از مستطیل ABCD دو برابر عرض BC می باشد . از رأس A عمود BN را بر قطر BD وارد می کنیم . اگر این عمود ضلع CD را در نقطه M قطع کند. ثابت کنید :

AB = 4DM



فرض : ABCD مستطیل است. و

$AM \perp BD$ و $AB = 2BC$

حکم : AB = 4DM

اثبات :

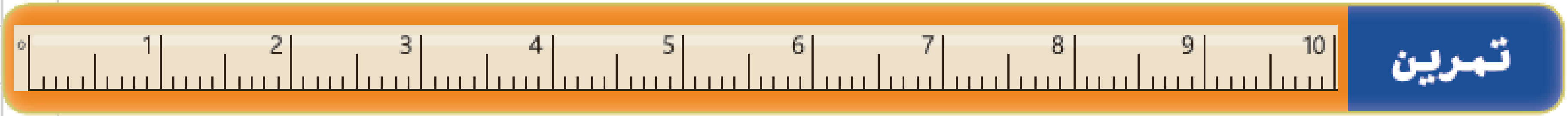
$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} = 90° \to \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90° \\ \Delta ABN: \hat{N} = 90° \to \hat{B}_1 + \hat{A}_2 = 90° \end{array}\right\} \to \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$$

در دو مثلث ADM و ABD داریم :

$$\left.\begin{array}{l} (1) \to \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{D} = \hat{A} = 90° \end{array}\right\} \to \Delta ADM \sim \Delta ABD \to \frac{DM}{AD} = \frac{AM}{BD} = \frac{AD}{AB} \to \frac{DM}{AD} = \frac{AD}{AB} (2)$$

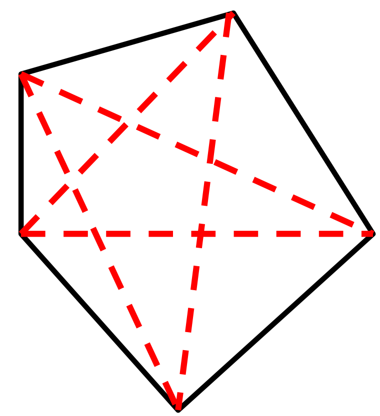
ولی می دانیم که $AD = BC$, $AB = 2BC$ پس : $AD = BC = \frac{AB}{2}$

$$(2) \to \frac{DM}{BC} = \frac{BC}{AB} \to DM = \frac{BC^2}{AB} = \frac{(\frac{AB}{2})^2}{AB} = \frac{AB}{4} \to AB = 4DM$$



۱ــ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

پاسخ: ۵ ضلعی زیرا

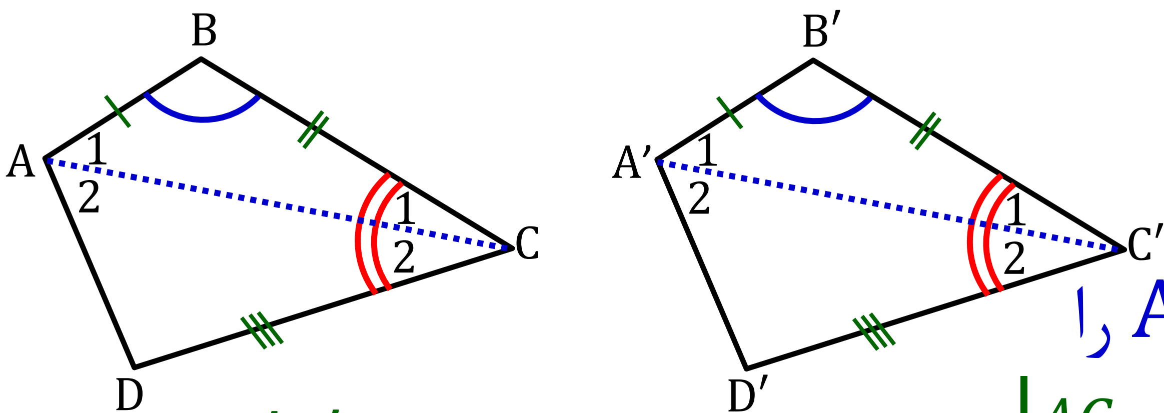


$$\frac{n(n-3)}{2} = n \rightarrow n(n-3) = 2n$$

$$\xrightarrow{n\neq 0} n-3=2 \rightarrow n=5$$

تمرین

۲ــ در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



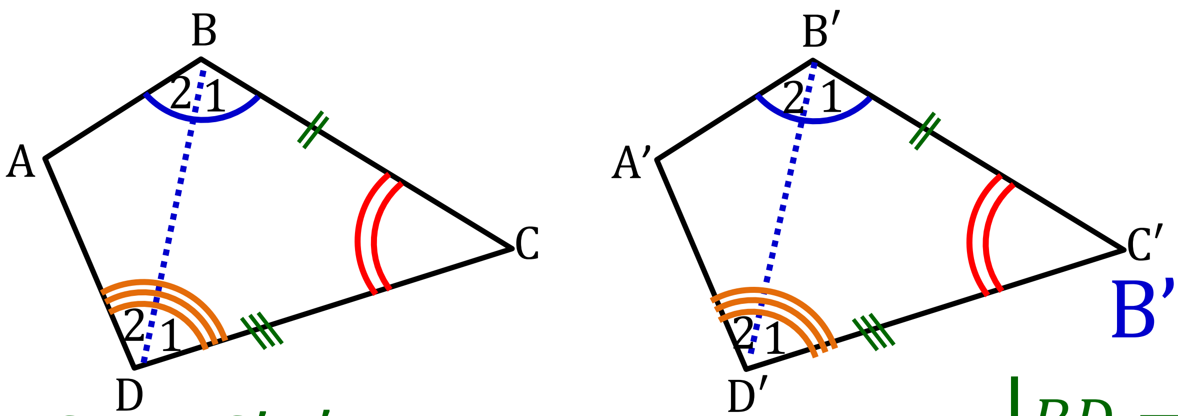
پاسخ : قطرهای AC و A'C' را رسم می کنیم :

$$\left.\begin{array}{r} AB = A'B' \\ \hat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \rightarrow \left| \begin{array}{l} AC = A'C' \\ \hat{A}_1 = \widehat{A'}_1 \\ \hat{C}_1 = \widehat{C'}_1 \rightarrow \hat{C}_2 = \widehat{C'}_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} CD = C'D' \\ \hat{C}_2 = \widehat{C'}_2 \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \rightarrow \Delta BCD \cong \Delta B'C'D' \rightarrow \left| \begin{array}{l} AD = A'D' \\ \hat{A}_2 = \widehat{A'}_2 \rightarrow \hat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{D} = \widehat{D'} \end{array}\right.$$

تمرین

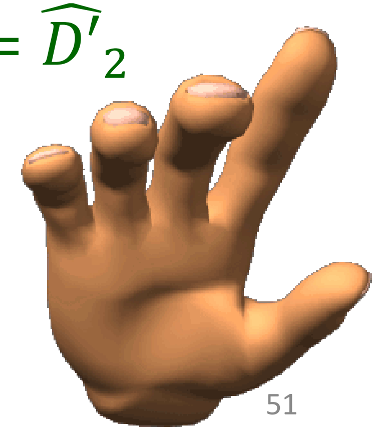
اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



پاسخ : قطرهای BD و B'D' را رسم می کنیم :

$$\left.\begin{aligned} CD &= C'D' \\ \hat{C} &= \widehat{C'} \\ BC &= B'C' \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \rightarrow \left| \begin{array}{l} BD = B'D' \\ \hat{B}_1 = \widehat{B'}_1 \rightarrow \hat{B}_2 = \widehat{B'}_2 \\ \hat{D}_1 = \widehat{D'}_1 \rightarrow \hat{D}_2 = \widehat{D'}_2 \end{array} \right.$$

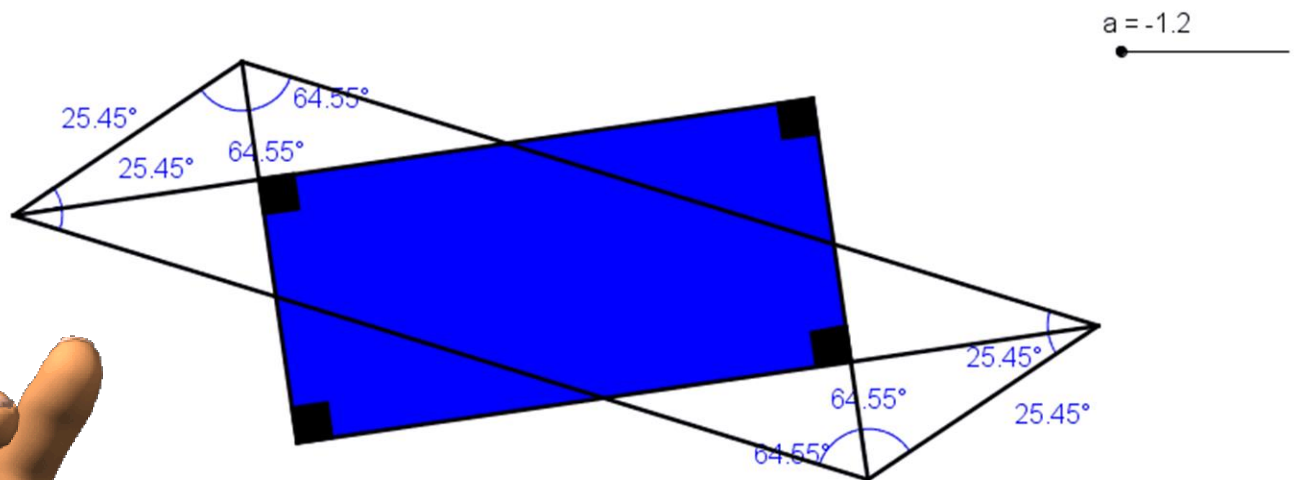
$$\left.\begin{aligned} \hat{B}_2 &= \widehat{B'}_2 \\ BD &= B'D' \\ \hat{D}_2 &= \widehat{D'}_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \rightarrow \left| \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AD = A'D' \\ \hat{A} = \widehat{A'} \end{array} \right.$$

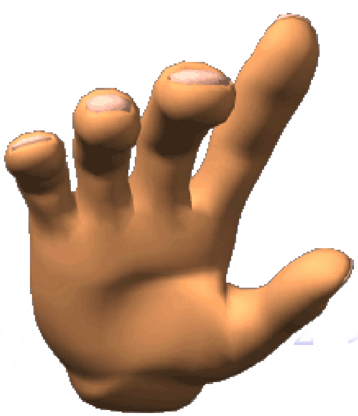


تمرین

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$،

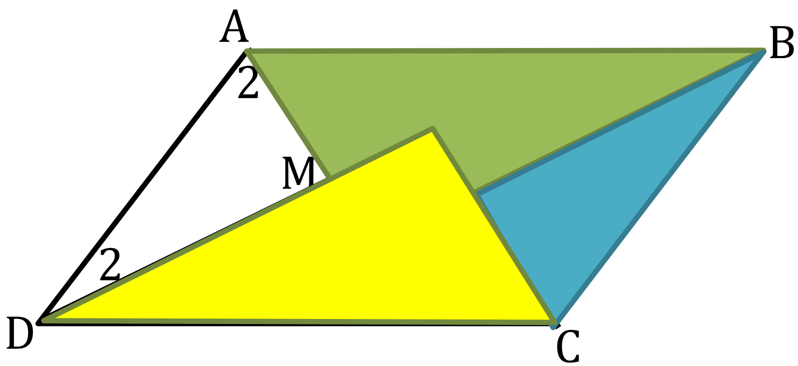
در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می گیرید؟





تمرین

۳ــ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



فرض : ABCD متوازی الاضلاع است .

حکم : MNPQ مستطیل است .

اثبات : در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور ، مکمل یکدیگرند. پس :

$$\hat{A}+\hat{B}=180^\circ \rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=90^\circ \rightarrow \Delta ABQ: \hat{A}_1+\hat{B}_1=90^\circ \rightarrow \hat{Q}=90^\circ$$

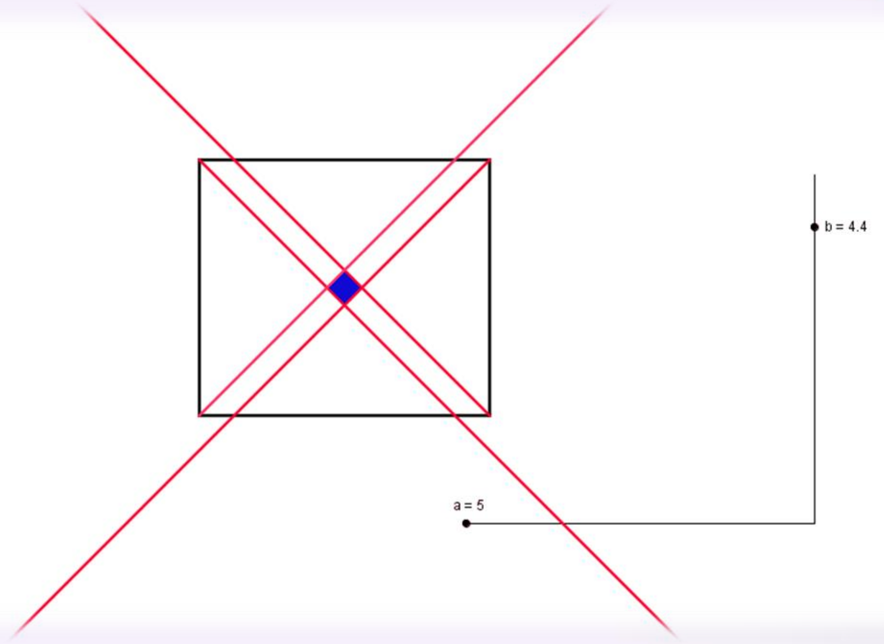
به روشی مشابه می توان ثابت کرد :

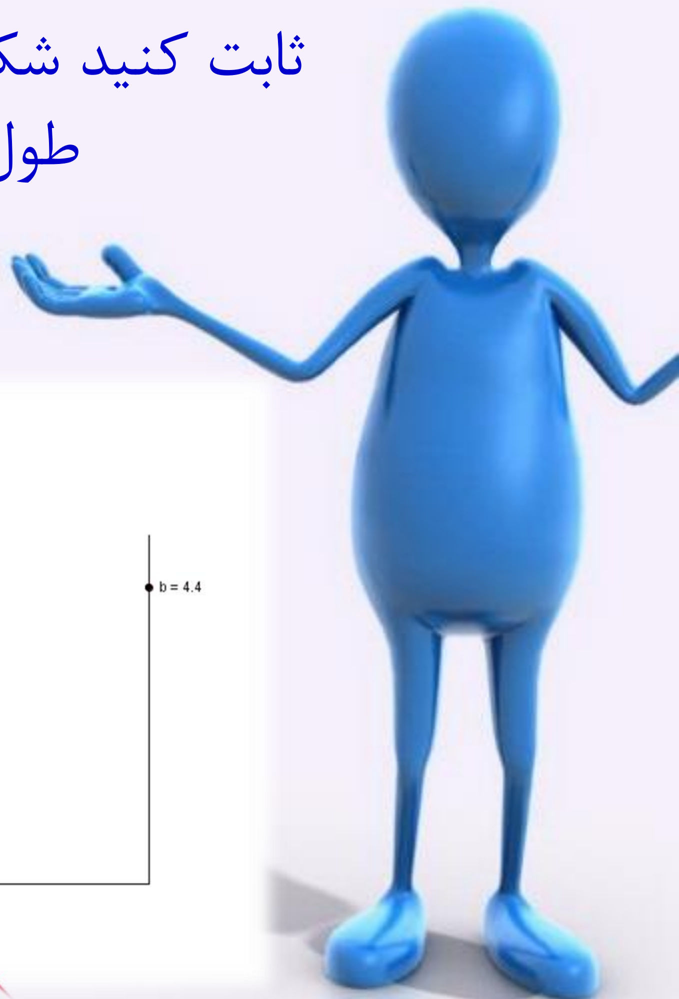
$$\Delta BCP: \hat{B}_2+\hat{C}_2=90^\circ \rightarrow \hat{P}=90^\circ \;, \Delta CDN: \hat{C}_1+\hat{D}_1=90^\circ \rightarrow \hat{N}=90^\circ$$

$\rightarrow \hat{N}=\hat{P}=\hat{Q}=90^\circ \rightarrow$ MNPQ مستطیل است

فکر کنید

ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک مستطیل که طول عرض آن مساوی نباشند ، مربع است.





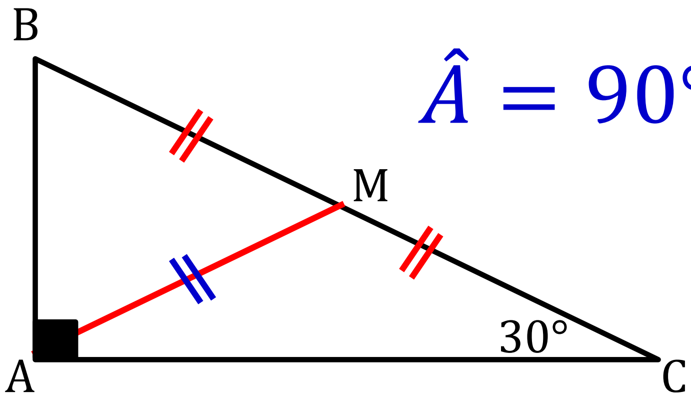
تمرین

۴ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB=\frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.
یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

تمرین



فرض : $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ و $BM = MC = \frac{BC}{2}$

حکم : $AB = \frac{BC}{2}$, $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

اثبات : در هر مثلث قائم الزاویه ، میانه وارد بر وتر ، نصف وتر است یعنی :

$$AM = BM = CM = \frac{BC}{2}$$

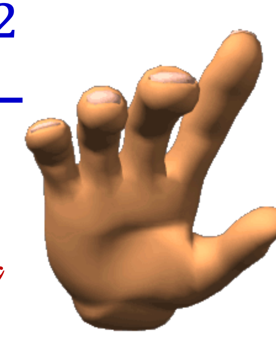
از طرف دیگر : $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ \rightarrow \hat{B} = 60^\circ$ پس :

$$\Delta ABM: \hat{B} = 60, AM = BM \rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2} \rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

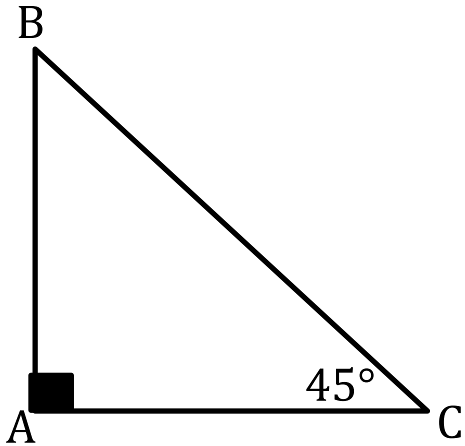
$$\Delta ABC: \hat{A} = 90^\circ \rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\rightarrow AC^2 = \frac{3}{4}BC^2 \rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان



تمرین



فرض : $\hat{A} = 90°$ و $\hat{C} = 45°$

حکم : $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$

اثبات :

$$\hat{A} = 90° \text{ و } \hat{C} = 45° \rightarrow \hat{B} = 45° \rightarrow AB = AC$$

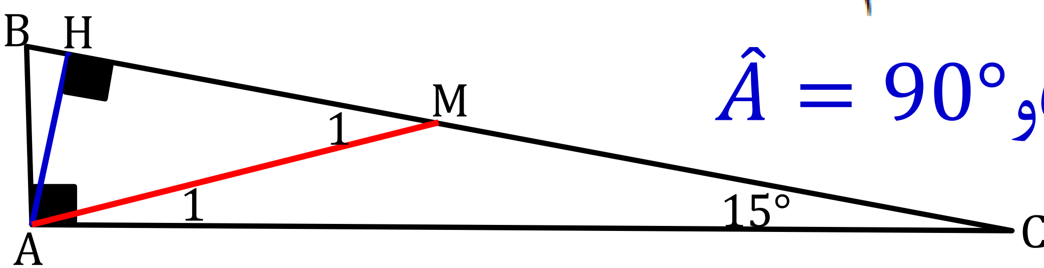
$$\Delta ABC:\ \hat{A} = 90° \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AB^2 \rightarrow BC^2 = 2AB^2 \rightarrow BC = \sqrt{2}AB$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{2}} BC \rightarrow AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$$

تمرین

۵ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، اندازهٔ زاویهٔ B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است.



فرض : $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 15^\circ , AH \perp BC$

حکم : $AH = \frac{1}{4} BC$

اثبات : میانه AM را رسم می کنیم . میانه وارد بر وتر نصف وتر است . پس :

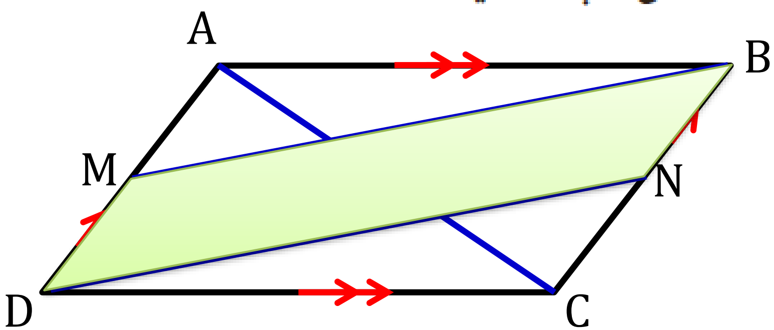
$$AM = MC = \frac{BC}{2} \rightarrow \Delta ABM : AM = MC \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} = 15^\circ$$

$$\rightarrow \widehat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$$

$$\Delta AHM : \widehat{H} = 90^\circ \ , \widehat{M}_1 = 30^\circ \rightarrow \underline{AH} = \frac{AM}{2}$$

$$\rightarrow AH = \frac{\frac{BC}{2}}{2} = \frac{BC}{4}$$

۶ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



فرض : $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} , \mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$

$AM = MD, BN = NC$

حکم : $AP = PQ = QC$

اثبات :

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} , \mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC} \rightarrow AD = BC \xrightarrow{\div 2} DM = BN$$

$$\rightarrow \mathrm{DM} \parallel \mathrm{BN} , DM = BN \rightarrow BM \parallel DN \quad (1)$$

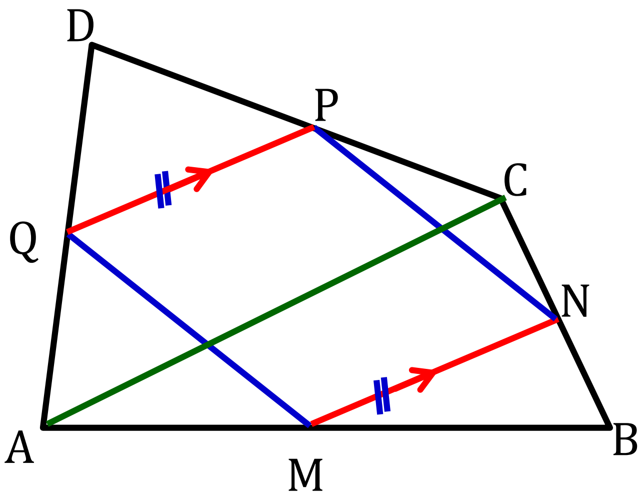
$$\xrightarrow{(1)} \Delta ADQ : \mathrm{PM} \parallel \mathrm{DQ} \rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MD} = 1 \rightarrow AP = PQ$$

$$\xrightarrow{(1)} \Delta BCP : \mathrm{BP} \parallel \mathrm{NQ} \rightarrow \frac{PQ}{CQ} = \frac{BN}{NC} = 1 \rightarrow PQ = QC$$

$$\rightarrow AP = PQ = QC$$

تمرین

۷ـ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



فرض : $AM = MB, BN = NC$

$CP = PD, DQ = AQ$

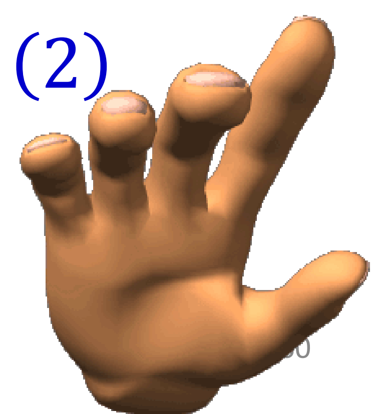
حکم : $MN \parallel PQ, PN \parallel QM$

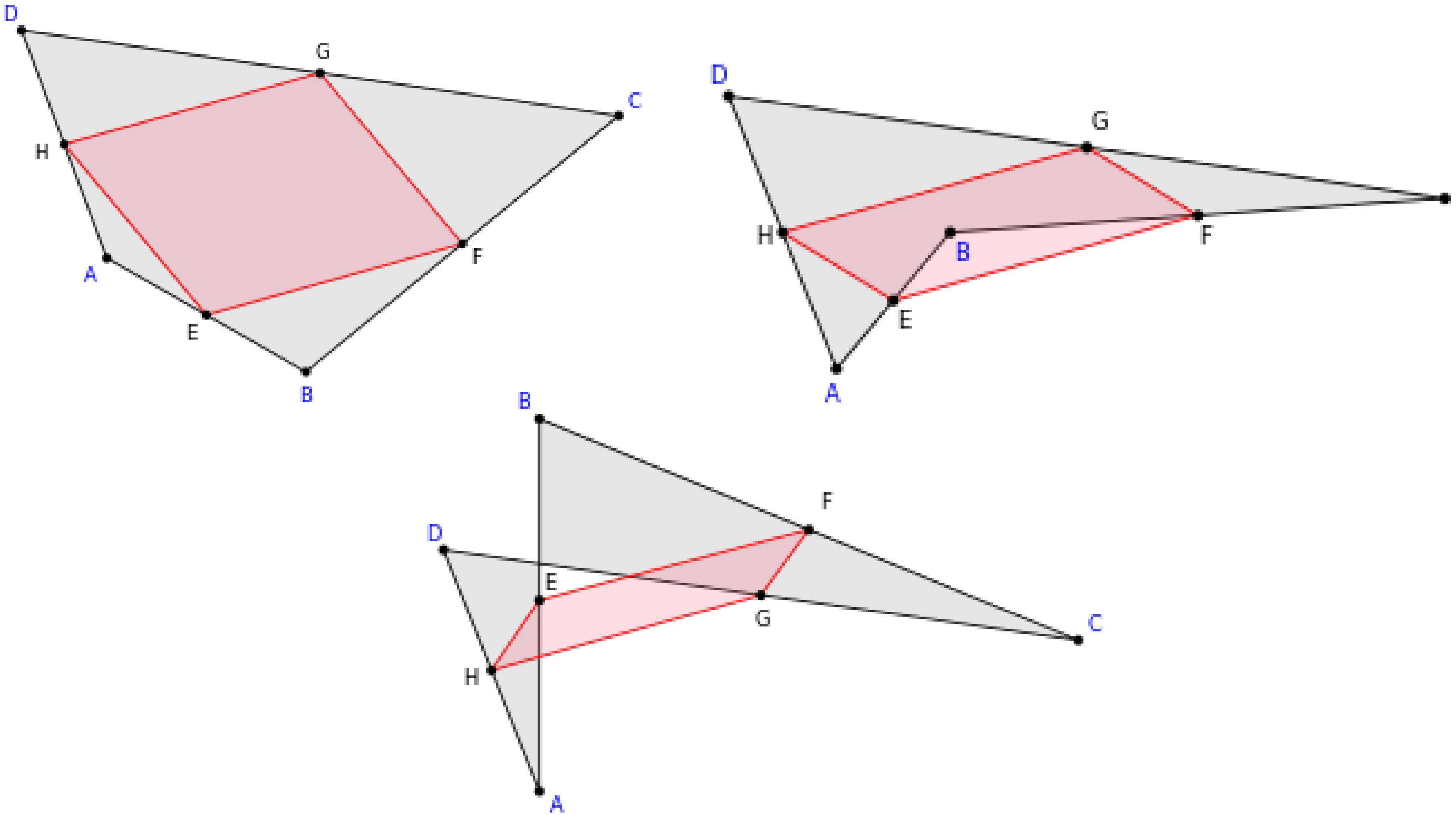
اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

$$\Delta ABC: \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{MN} \parallel \mathrm{AC}\ , \mathrm{MN} = \frac{AC}{2} \qquad (1)$$

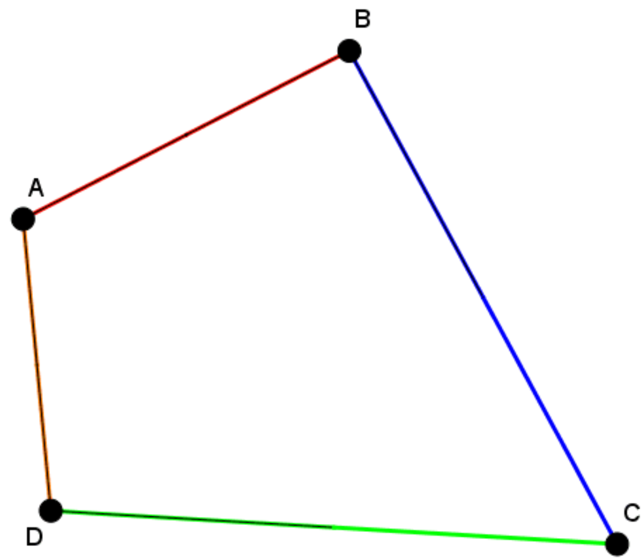
$$\Delta ACD: \frac{DP}{DC} = \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{PQ} \parallel \mathrm{AC}\ , \mathrm{PQ} = \frac{AC}{2} \qquad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow MN \parallel PQ, MN = PQ \rightarrow PN \parallel QM$$



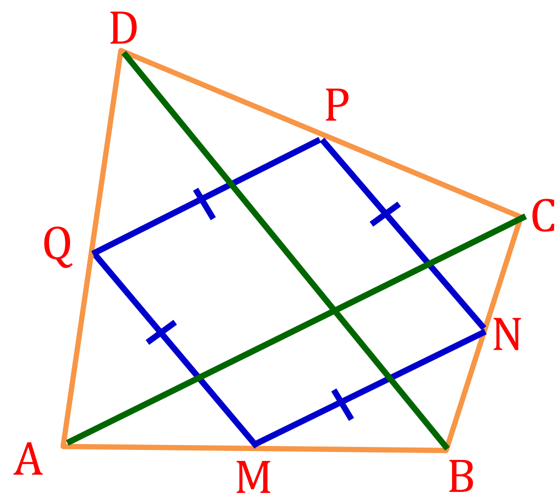

D
G
C
H
F
A
E
B
D
G
C
H
B
F
E
A
B
F
D
E
G
C
H
A

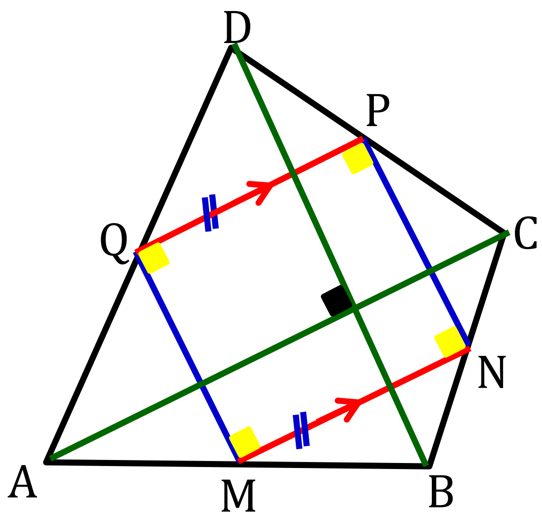
Play/Pause



تمرین

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟



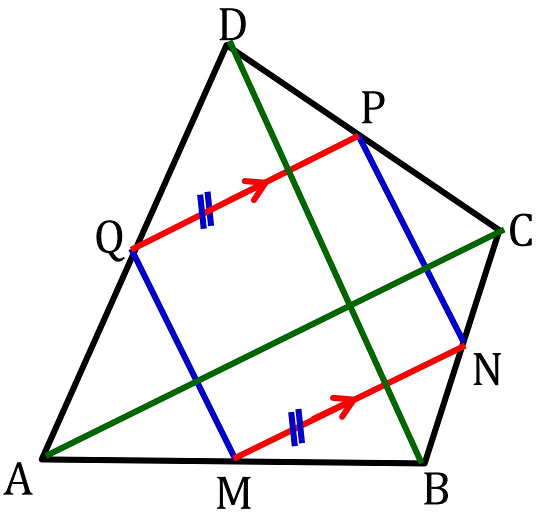


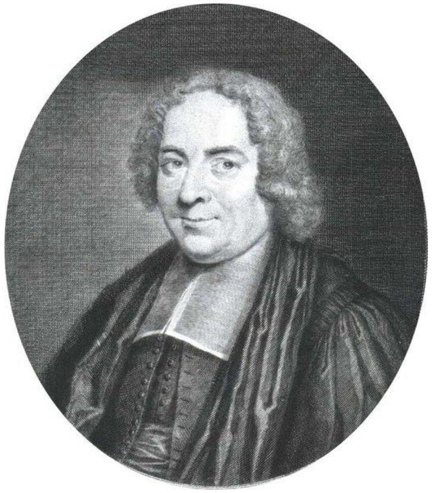
پاسخ : اضلاع مقابل چهارضلعی MNPQ دو به دو با قطرهای متناظر چهارضلعی ABCD موازی اند. پس اگر قطرهای ABCD برهم عمود باشند MNPQ مستطیل است

اندازه اضلاع مقابل چهارضلعی MNPQ دو به دو نصف اندازه قطرهای متناظر چهارضلعی ABCD است .پس اگر قطرهای ABCD مساوی باشند MNPQ لوزی است

تمرین

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟





سوالی که حل شد . اولین بار درقرن هفدهم میلادی توسط ریاضی دان فرانسوی پیتر وارینون (**Pierre Varignon**) حل شد.

پاسخ :محیط متوازی الاضلاع MNPQ مساوی مجموع اندازه قطرهای چهارضلعی ABCD است زیرا :

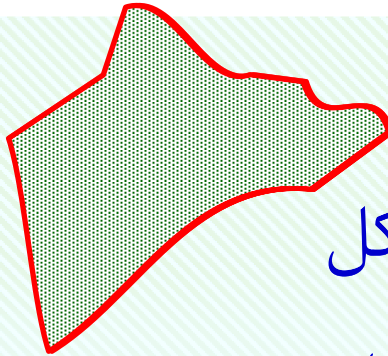
$$MN = PQ = \frac{AC}{2} \ , PN = MQ = \frac{BD}{2}$$

$$\rightarrow MN + NP + PQ + QM = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = AC + BD$$

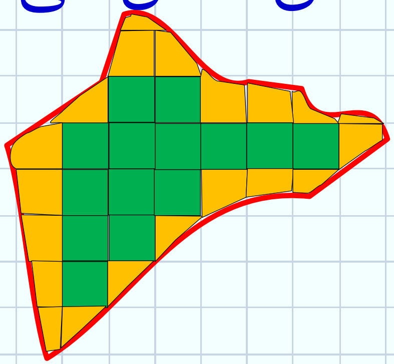
درس دوم

مساحت و کاربردهای آن

سطح : در فضای دو بعدی مجموعه نقاط درون و روی یک شکل را سطح آن شکل می نامند.



مساحت : تعداد مربع هایی به طول ضلع واحد که سطح یک شکل را می پوشانند را مساحت آن شکل می نامند.



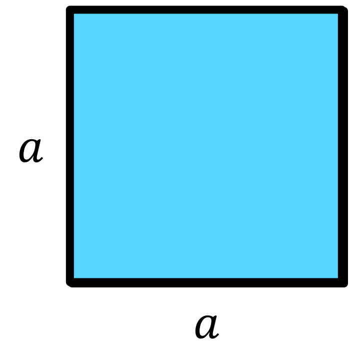
یادآوری

محیط چند ضلعی : مجموع اندازه های اضلاع یک چند ضلعی را محیط آن چند ضلعی می نامند.

معمولا مساحت را با یکی از نمادهای S=Surface یا A= area نشان می دهند.

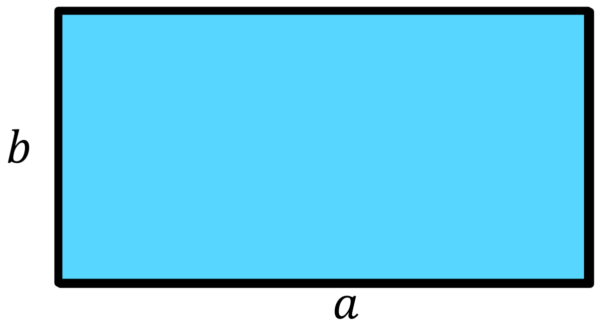
ولی محیط با نماد 2P=Perimeter شناخته می شود.

یادآوری روابط مساحت



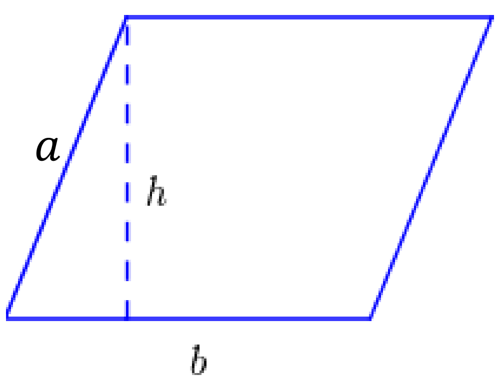
مساحت مربع : $S = a^2$

محیط مربع : $2P = 4a$



مساحت مستطیل : $S = a \times b$

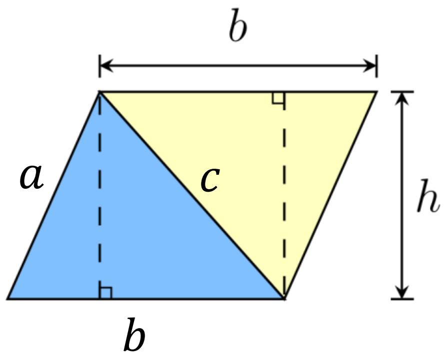
محیط مستطیل : $2P = 2(a + b)$



مساحت متوازی الاضلاع : $S = bh$

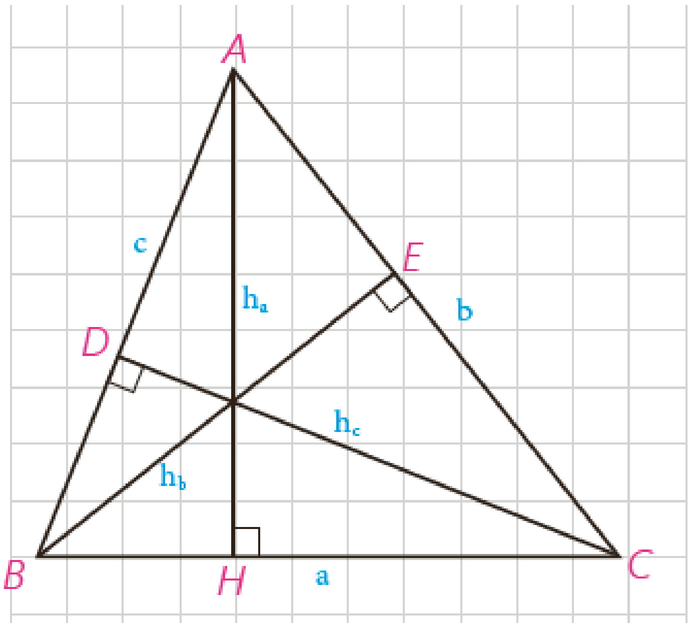
محیط متوازی الاضلاع : $2P = 2(a + b)$

یادآوری روابط مساحت

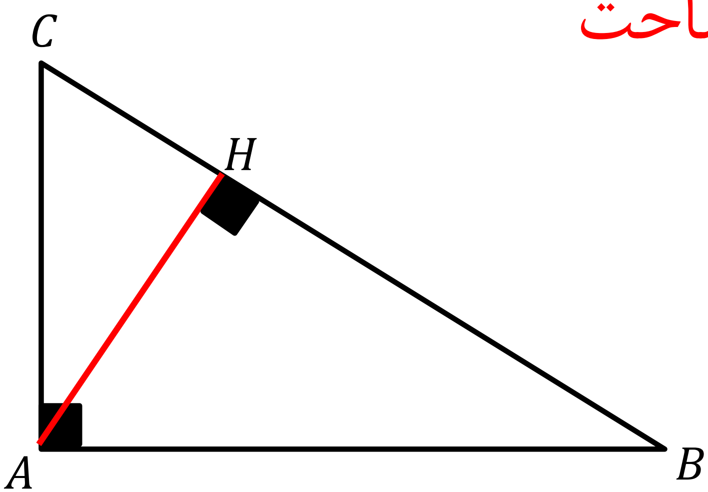


مساحت مثلث : $S = \frac{1}{2}ah$

محیط مثلث : $2P = a + b + c$



$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$



یادآوری روابط مساحت

مثال ۱ : ثابت کنید اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد . آنگاه : $AH \times BC = AC \times AB$

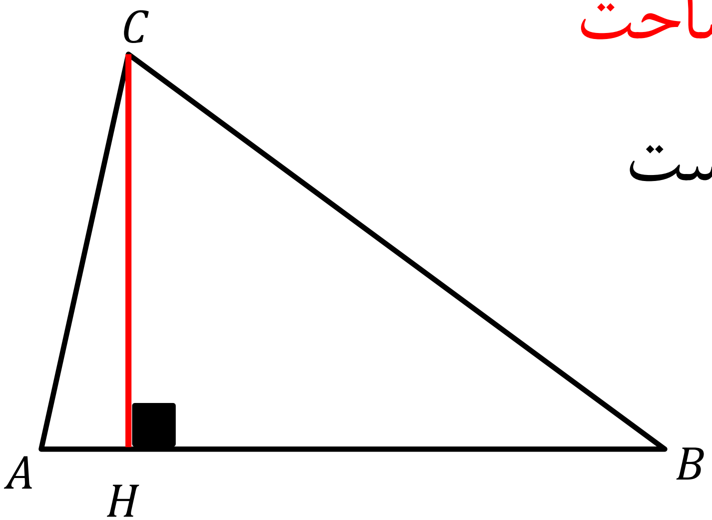
پاسخ :

$$2S = AC \times AB$$

$$2S = AH \times BC$$

$$\rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

یادآوری روابط مساحت



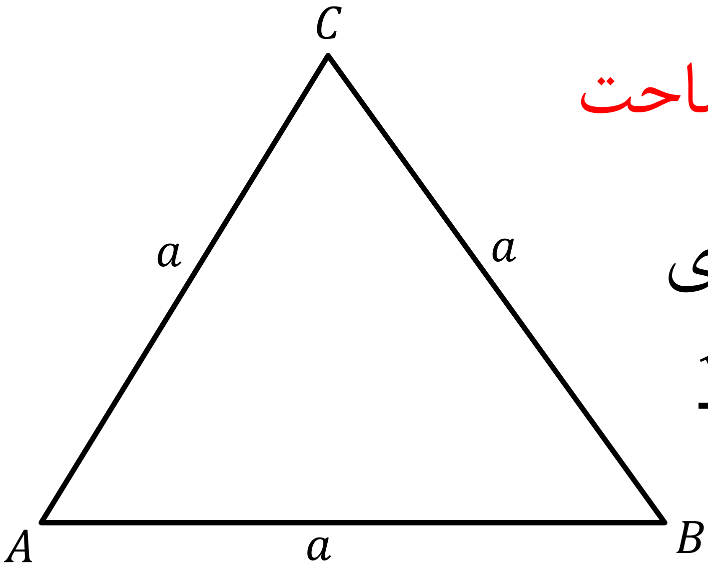
مثال۲ : ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها .

پاسخ : در مثلث ABC ارتفاع CH را بر ضلع AB وارد می کنیم :

$$\Delta ABH:\ \widehat{H}=90^\circ \rightarrow \sin A=\frac{CH}{AC} \rightarrow CH=AC\times \sin A$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CH \rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times AC\times \sin A$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times AC\times \sin A=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times BC\times \sin B=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\times BC\times \sin C$$



یادآوری روابط مساحت

مثال۳ : ثابت کنید مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

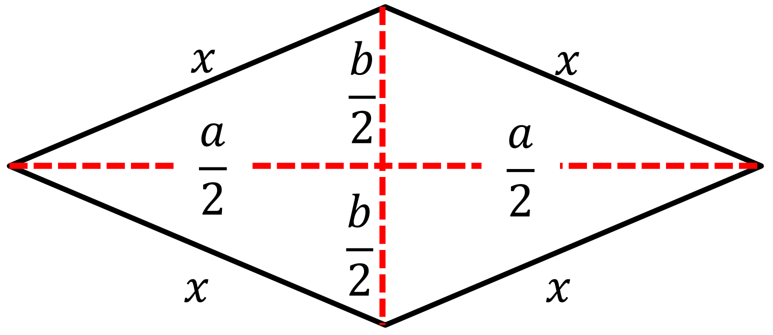
پاسخ :

$$\Delta ABC : AB = AC = BC = a \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times AC \times \sin A$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \times a \times \sin 60° = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

یادآوری روابط مساحت

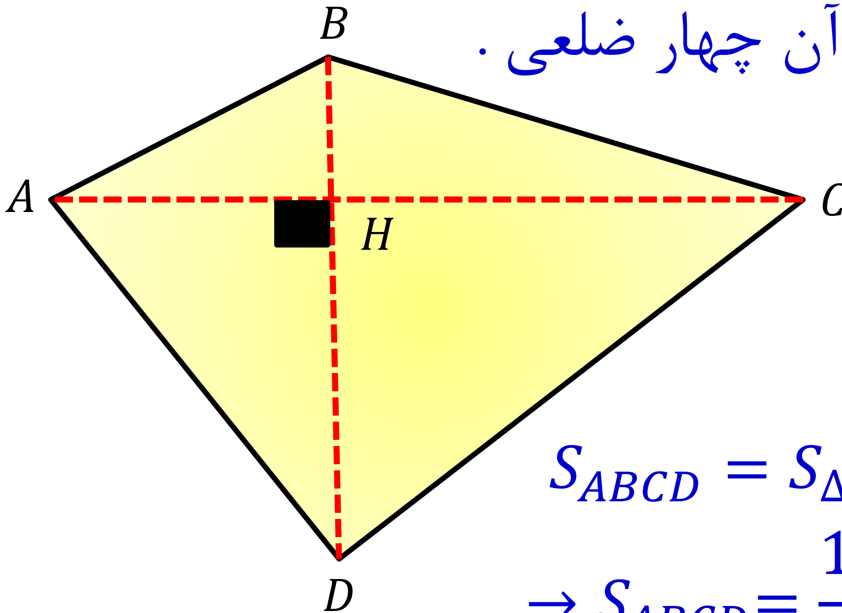


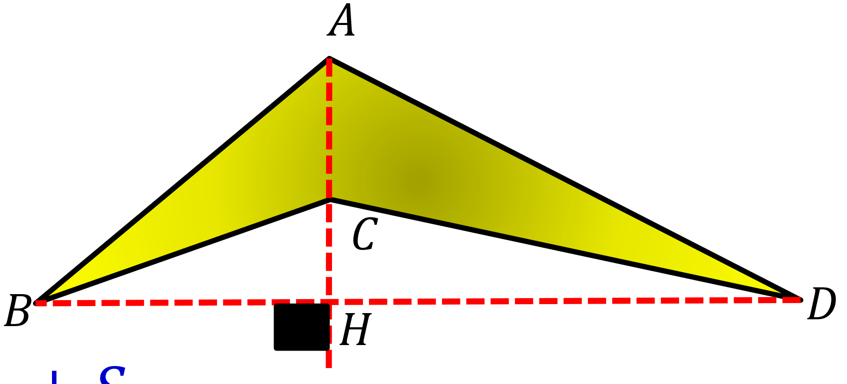
مساحت لوزی : $S=\frac{1}{2}ab$

محیط لوزی : $2P=4x$

اندازه ضلع لوزی : $x=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2}$

مثال ۴: ثابت کنید مساحت هر چهار ضلعی که قطرهایش برهم عمودند برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های دو قطر آن چهار ضلعی .





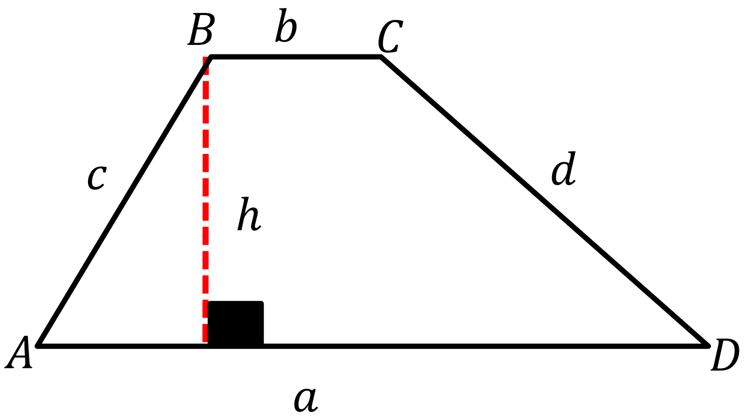
$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}$$

$$\rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BH+\frac{1}{2}AC\times HD$$

$$\rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times(BH+HD)\rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

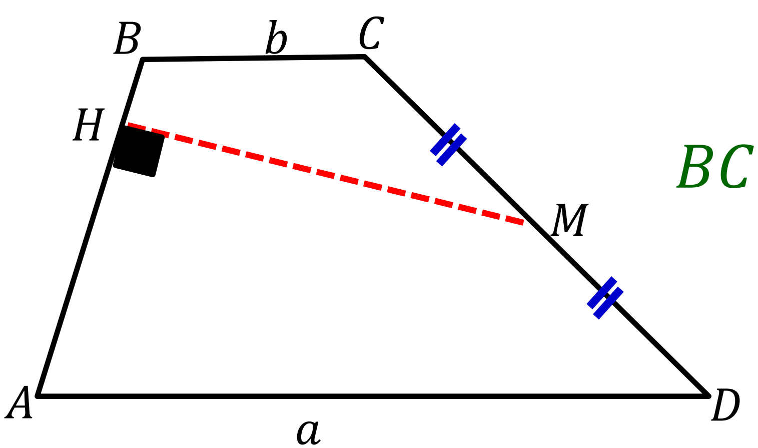
یادآوری روابط مساحت



مساحت ذوزنقه : $S = \frac{1}{2}(a+b)h$

محیط ذوزنقه : $2P = a+b+c+d$

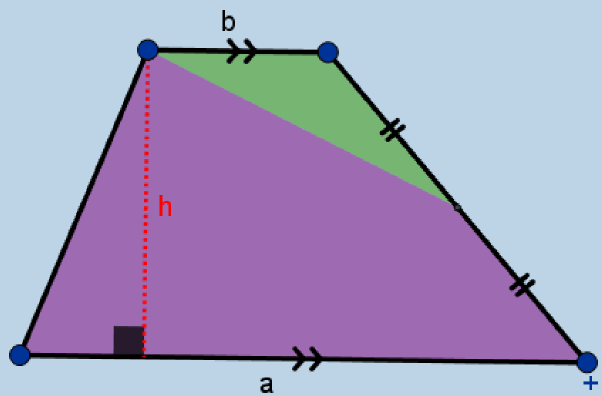
سوال : ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله آن ساق از وسط ساق دیگر.



فرض : $BC \parallel AD ,AB \nparallel CD,CM = MD,MH \perp AB$

حکم : $S_{ABCD} = MH \times AB$

یادآوری روابط مساحت



عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

ویژگی های مساحت مثلث

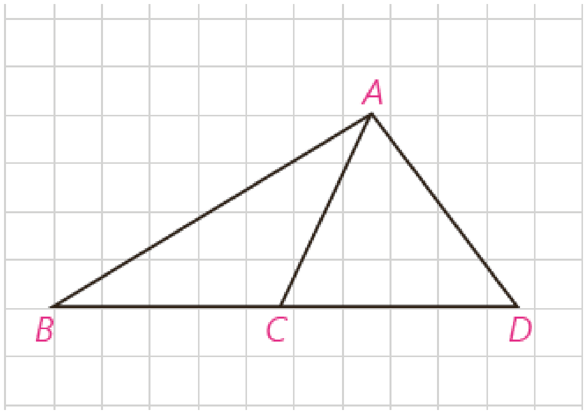
ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

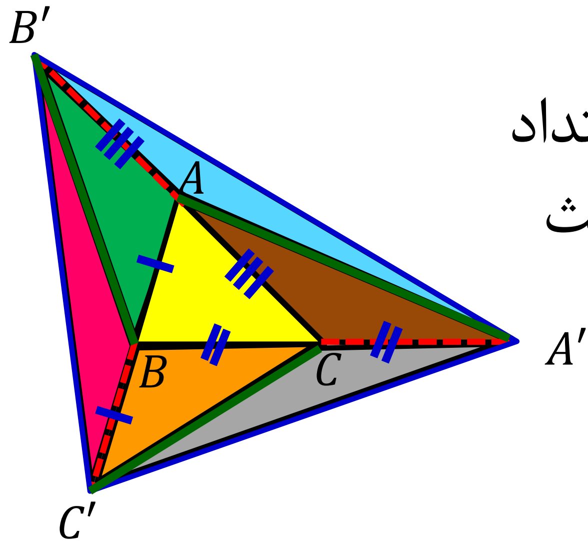
ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازهٔ دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



مثال ۱ :



اضلاع مثلث ABC را در یک جهت به اندازه خودشان امتداد داده تا مثلث A’B’C’ بدست آید ثابت کنید مساحت مثلث A’B’C’ هفت برابر مساحت مثلث ABC است.

اثبات: پاره خط AA' را رسم می کنیم :

$$\Delta ABA': BC = CA' \rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AA'C}$$

$$\Delta A'B'C: CC = AB' \rightarrow S_{\Delta AA'C} = S_{\Delta AA'B'}$$

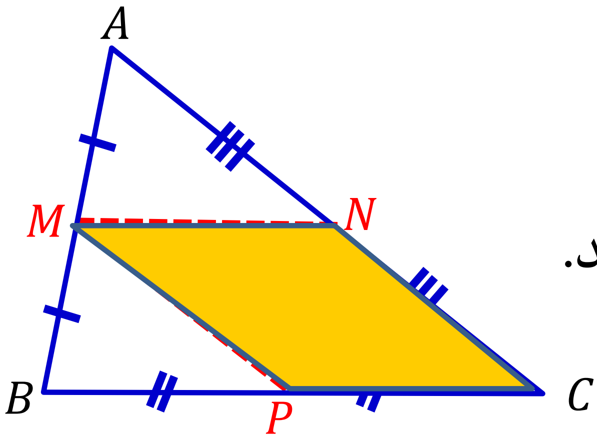
$$\rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AA'C} = S_{\Delta AA'B'}$$

به روش مشابه با رسم پاره خطهای BB', CC' می توان ثابت نمود که مساحت هر یک ازشش مثلث تشکیل شده با مساحت مثلث ABC برابر است .

پس :

$$S_{\Delta A'B'C'} = 7S_{\Delta ABC}$$

مثال ۲ :



ثابت کنید اگر وسطهای اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم . چهار مثلث تشکیل شده ، مساحت هایی برابر دارند.

اثبات:

$$\Delta ABC: \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = 1 \to MN \parallel BC \to MN \parallel PC \quad (1)$$

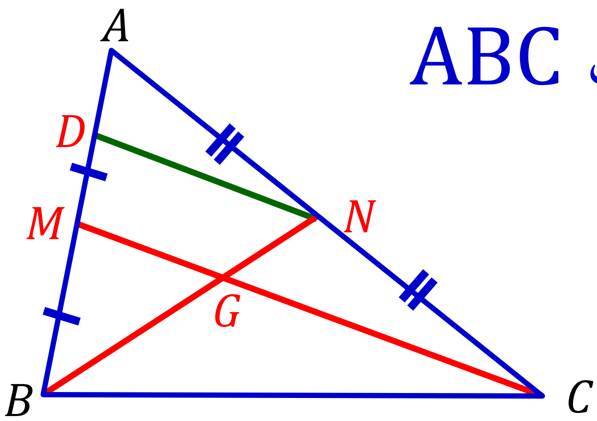
$$\Delta ABC: \frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PC} = 1 \to MP \parallel AC \to MP \parallel NC \quad (2)$$

$$(1),(2) \to \Delta MNP \cong \Delta PNC \to S_{\Delta MNP} = S_{\Delta PNC}$$

به روش مشابه می توان ثابت نمود که چهار ضلعی های $MNPB$ و $AMPN$ متوازی الاضلاع اند . درنتیجه :

$$S_{\Delta MNP} = S_{\Delta PNC} = S_{\Delta MPB} = S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$$

قضیه : دو میانه هر مثلث همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می کنند.



اثبات : فرض کنیم دو میانه BN و CM از مثلث ABC همدیگر را در نقطه G قطع کنند.

از نقطه N خطی موازی میانه CM رسم نموده تا ضلع AB را در نقطه D قطع کند.

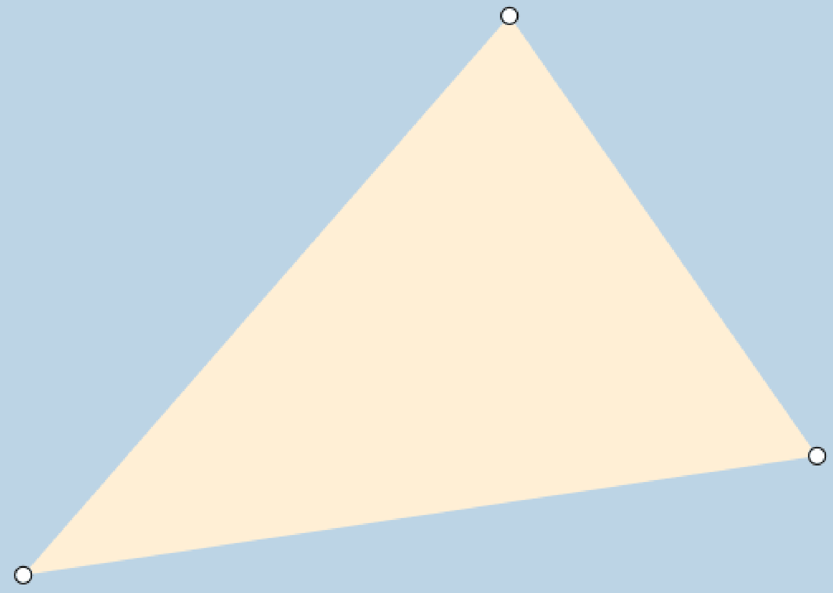
$$\Delta ACM: ND \parallel CM \rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{AN}{NC} = 1 \rightarrow AD = DM = \frac{AM}{2}$$

$$\xrightarrow{AM=MB} DM = \frac{BM}{2} \qquad (1)$$

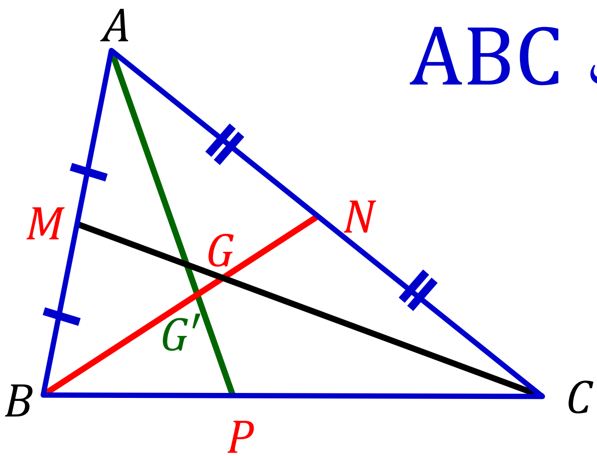
$$\Delta BDN: ND \parallel GM \xrightarrow{(1)} \frac{BG}{GN} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{2} \rightarrow BG = 2GN$$

به روشی مشابه می توان ثابت کرد : $CG = 2GM$

پس : $\frac{GN}{GB} = \frac{GM}{GC} = \frac{1}{2}$



قضیه : میانه های هر مثلث همرس اند.



اثبات : فرض کنیم دو میانه BNو CM از مثلث ABC همدیگر را در نقطه G قطع کنند.

بنا به قضیه قبل داریم : $(1)\quad \frac{GN}{GB}=\frac{GM}{GC}=\frac{1}{2}$

اگر دو میانه BNو AP از همان مثلث همدیگر را در نقطه دیگری مانند G' قطع کنند. با استدلال مشابه می توان نتیجه گرفت :

$$\frac{G'N}{G'B}=\frac{G'P}{G'C}=\frac{1}{2}\qquad (2)$$

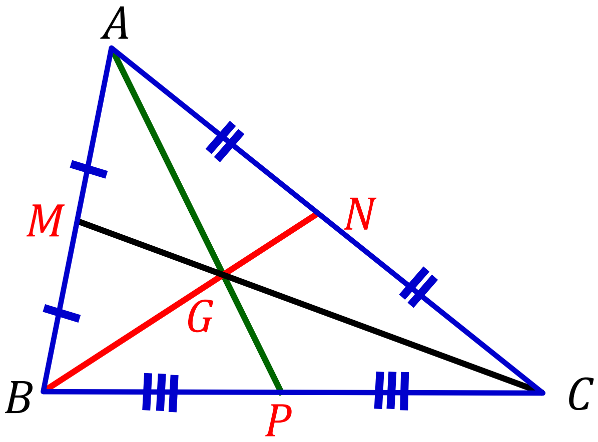
$$(1),(2)\rightarrow\frac{GN}{GB}=\frac{G'N}{G'B}=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{GN}{GN+GB}=\frac{G'N}{G'N+G'B}$$

$$\rightarrow\frac{GN}{BN}=\frac{G'N}{BN}\rightarrow GN=G'N$$

لذا دو نقطه G وG′ برهم منطبق اند و هرسه میانه در نقطه G همرس اند

نتیجه :

میانه های هر مثلث همرس اند. و یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کنند.



به عبارت دیگر :

$$\frac{GP}{GA}=\frac{GN}{GB}=\frac{GM}{GC}=\frac{1}{2}$$

پس اگر $CM=m_c$,$BN=m_b$,$AP=m_a$ آنگاه :

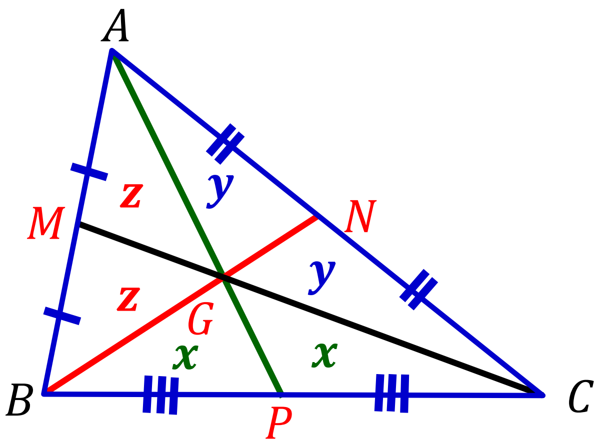
$$GA=\frac{2}{3}m_a \quad ,GP=\frac{1}{3}m_a$$

$$GB=\frac{2}{3}m_b \quad ,GN=\frac{1}{3}m_b$$

$$GC=\frac{2}{3}m_c \quad ,GM=\frac{1}{3}m_c$$

مثال ۳ :

نشان دهید شش مثلث تشکیل شده از رسم میانه های یک مثلث ، مساحتهایی مساوی یکدیگر دارند.



اثبات : فرض کنیم AP و BN و BM میانه های مثلث ABC و G نقطه همرسی آنها باشد :

$$\Delta BGC: BP = BC \to S_{\Delta BGP} = S_{\Delta CGP} = x$$

$$\Delta AGC: AN = NC \to S_{\Delta AGN} = S_{\Delta CGN} = y$$

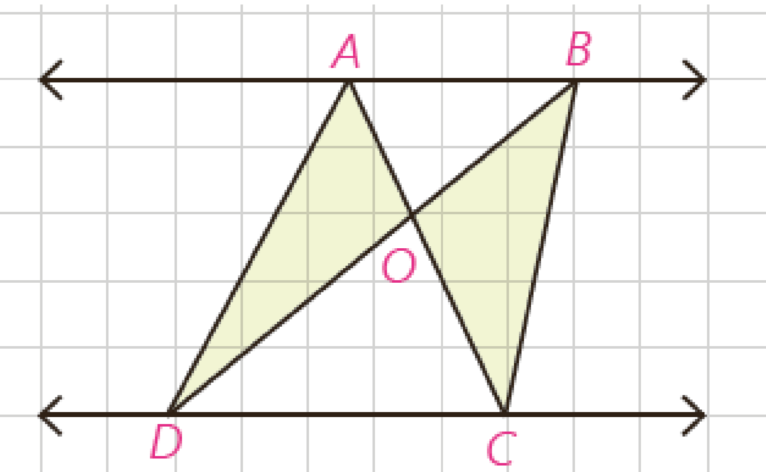
$$\Delta AGB: AM = MB \to S_{\Delta AGM} = S_{\Delta BGM} = z$$

$$\Delta ABC: BP = BC \to S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ACP} \to x + 2z = x + 2y \to z = y$$

$$\Delta ABC: AN = NC \to S_{\Delta ABN} = S_{\Delta BCN} \to 2x + y = 2z + y \to x = z$$

$$\boxed{\to x = y = z}$$

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{BDC} = S_{ADC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OBC} = S_{OAD}$ ؟



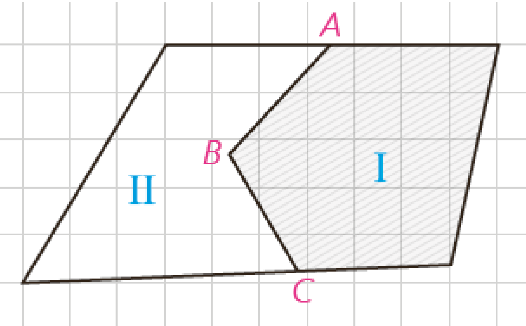
توضیح : این ویژگی به قضیه شبه پروانه ای معروف می باشد و درستی آن نیز واضح است زیرا :

$$AB \parallel CD \to S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD}$$

$$\to S_{\Delta OAD} + S_{\Delta OCD} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCD}$$

$$\to S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OBC}$$

یک مسئله



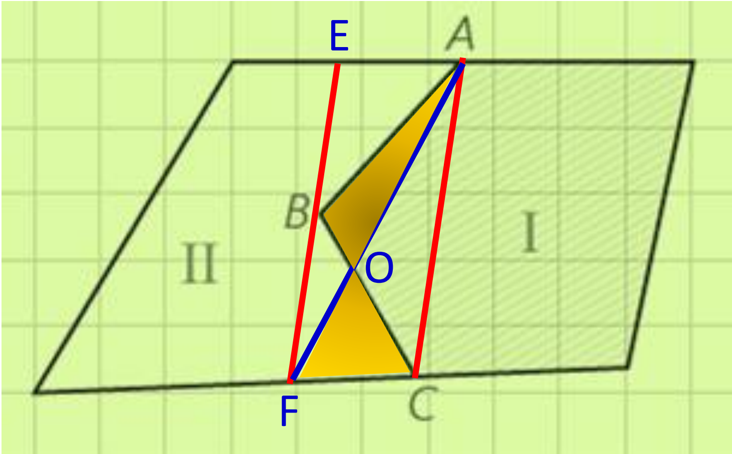
در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

پاسخ : A را به C متصل نموده سپس از B خطی موازی AC رسم می کنیم تا دو مرز را در نقاط E و F قطع کند .

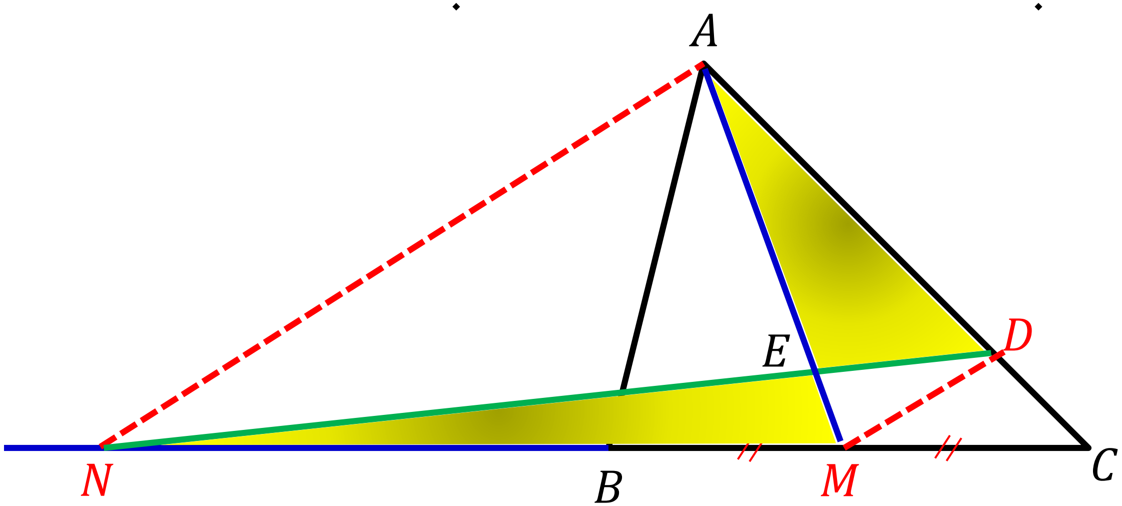
اگر پاره خط AF پاره خط BC را در نقطه O قطع کند . بنا به قضیه شبه پروانه ای داریم :

$$AC \parallel CD \rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OFC}$$

پس پاره خط AF پاسخ مساله است.



مثال ۴ : در مثلث ABC ، M وسط ضلع BC است . از طرف B ضلع BC را امتداد داده تا به نقطه دلخواه N برسیم. سپس از M خطی موازی AN رسم نموده تا AC را در D قطع کند . نسبت مساحت مثلث DNC به مساحت مثلث ABC چقدر است ؟



اثبات : فرض کنیم میانه AM پاره خط ND را در نقطه E قطع می کند.

بنا به قضیه شبه پروانه داریم :

$$AN \parallel MD \rightarrow S_{\Delta AED} = S_{\Delta EMN}$$

$$\rightarrow S_{\Delta DNC} = S_{\Delta EMN} + S_{\blacksquare EMCD} = S_{\Delta AED} + S_{\blacksquare EMCD} = S_{\Delta AMC} \quad (1)$$

$$\Delta ABC: BM = MC \rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \qquad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow S_{\Delta DNC} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \rightarrow \frac{S_{\Delta DNC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$$

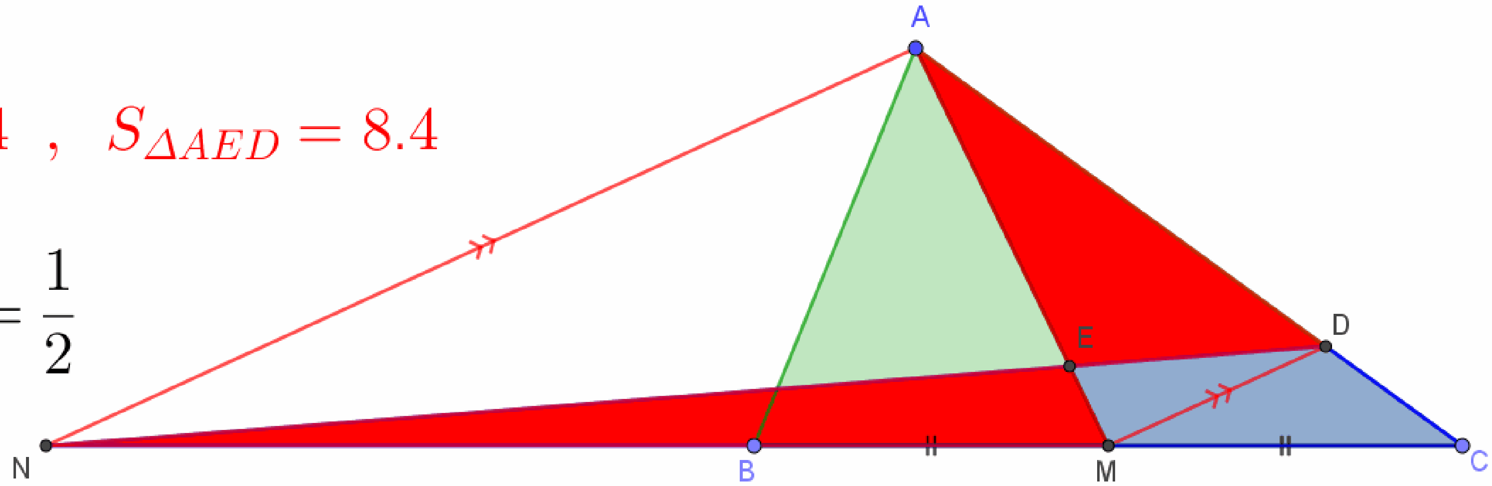
$S_{\Delta ABC} = 28$

$CD = 2.38 \quad , \quad CN = 20$

$S_{\Delta CDN} = 14$

$S_{\Delta EMN} = 8.4 \quad , \quad S_{\Delta AED} = 8.4$

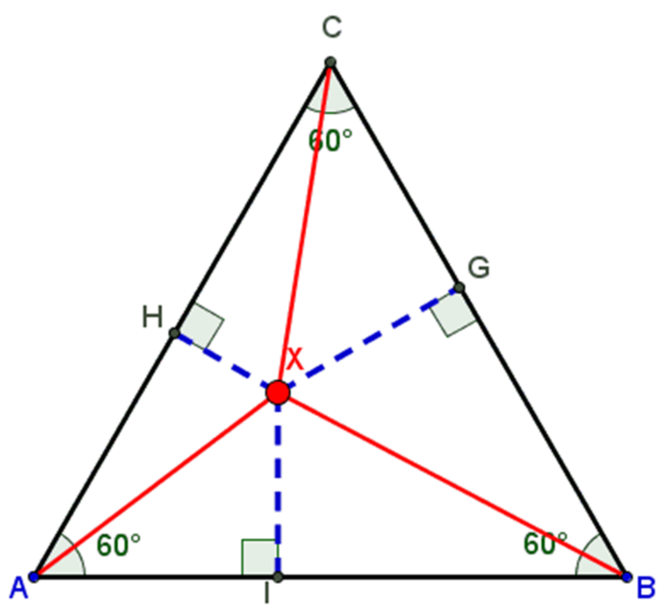
$$\frac{S_{\Delta CDN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

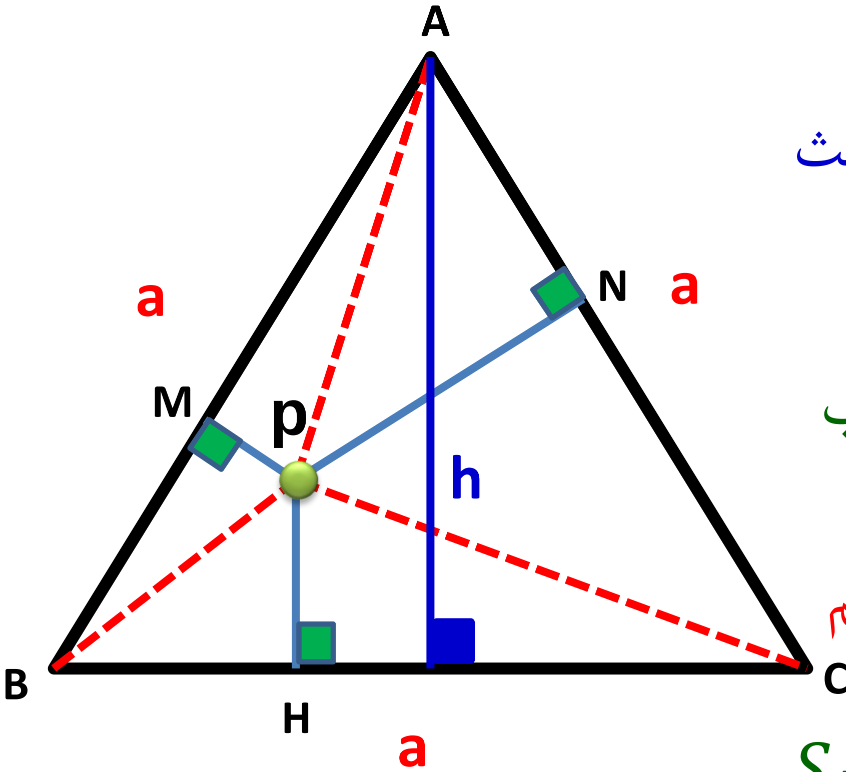


مثال ۵ : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a مساوی مقداری ثابت است . سپس آن مقدار ثابت را حساب کنید.

$$AX+BX+CX=3.62+4.64+3.94=12.2$$

$$GX+HX+IX=2.47+1.43+2.16=6.06$$





اثبات : فرض کنیم P نقطه دلخواهی درون مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع a باشد.

فاصله P از اضلاع AB,AC , BC را به تر تیب PM,PN,PH می نامیم.

P را به تمام رئوس مثلث ABC وصل می کنیم

$$S_{\Delta ABP} + S_{\Delta ACP} + S_{\Delta BCP} = S_{\Delta ABC}$$

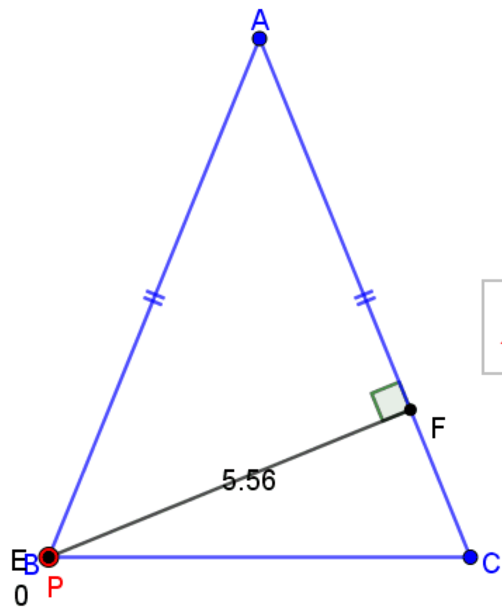
$$\rightarrow \frac{1}{2}AB \times PM + \frac{1}{2}AC \times PN + \frac{1}{2}BC \times PH = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}a \times PM + \frac{1}{2}a \times PN + \frac{1}{2}a \times PH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}a \times a$$

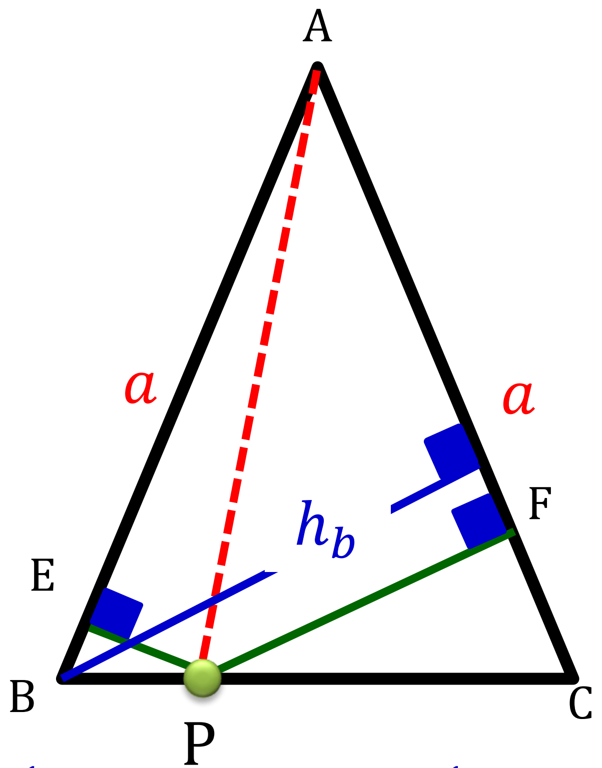
$$\xrightarrow{\div\frac{1}{2}a} PM + PN + PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \mathrm{h}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال ۶ : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن مساوی مقداری ثابت است . سپس آن مقدار ثابت را حساب کنید.



$$PE + PF = 0 + 5.56 = 5.56$$



اثبات : فرض کنیم P نقطه دلخواهی روی قاعده BC از مثلث متساوی الساقین ABC به طول ساق a باشد.

فاصله P از ساق های AB,AC را به تر تیب PE,PF می نامیم.

پاره خط PA را رسم می کنیم

$$S_{\Delta ABP} + S_{\Delta ACP} = S_{\Delta ABC}$$

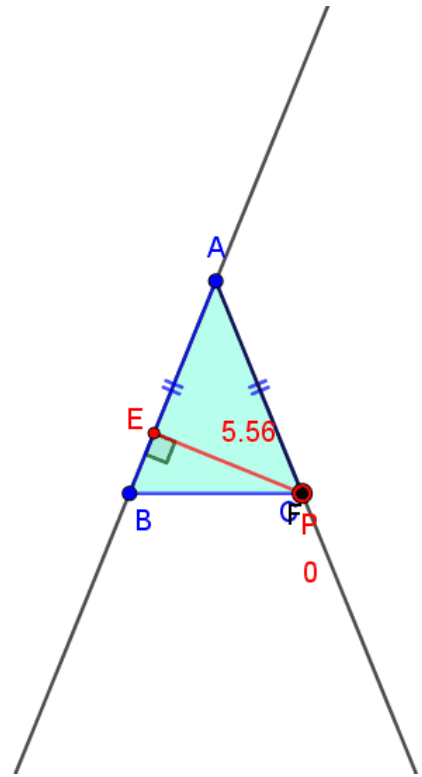
$$\rightarrow \frac{1}{2}AB \times PE + \frac{1}{2}AC \times PF = \frac{1}{2}a \times h_b$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}a \times PE + \frac{1}{2}a \times PF = \frac{1}{2}a \times h_b$$

$$\xrightarrow{\div\frac{1}{2}a} PE + PF = h_b$$

مثال ۷ : ثابت کنید قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن مساوی مقداری ثابت است . سپس آن مقدار ثابت را حساب کنید.

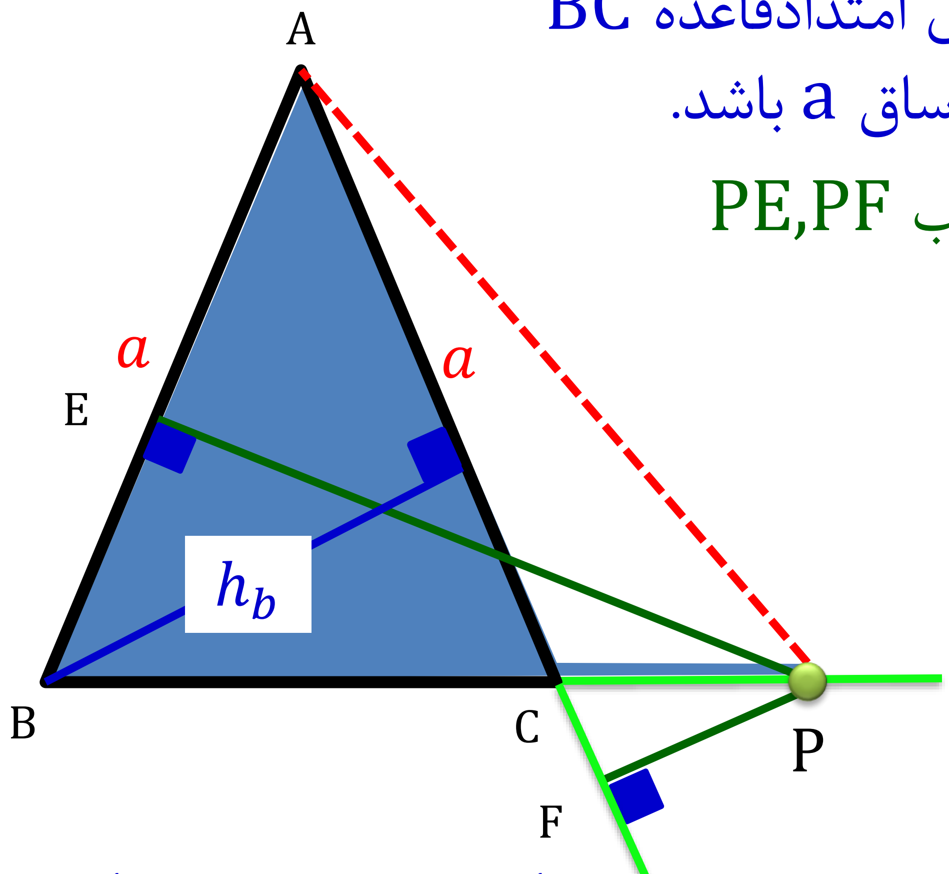
$$|PE - PF| = |5.56 - 0| = 5.56$$



اثبات : فرض کنیم P نقطه دلخواهی روی امتدادقاعده BC از مثلث متساوی الساقین ABC به طول ساق a باشد.

فاصله P از ساق های AB,AC را به تر تیب PE,PF می نامیم.

پاره خط PA را رسم می کنیم



$$|S_{\Delta ABP} - S_{\Delta ACP}| = S_{\Delta ABC}$$

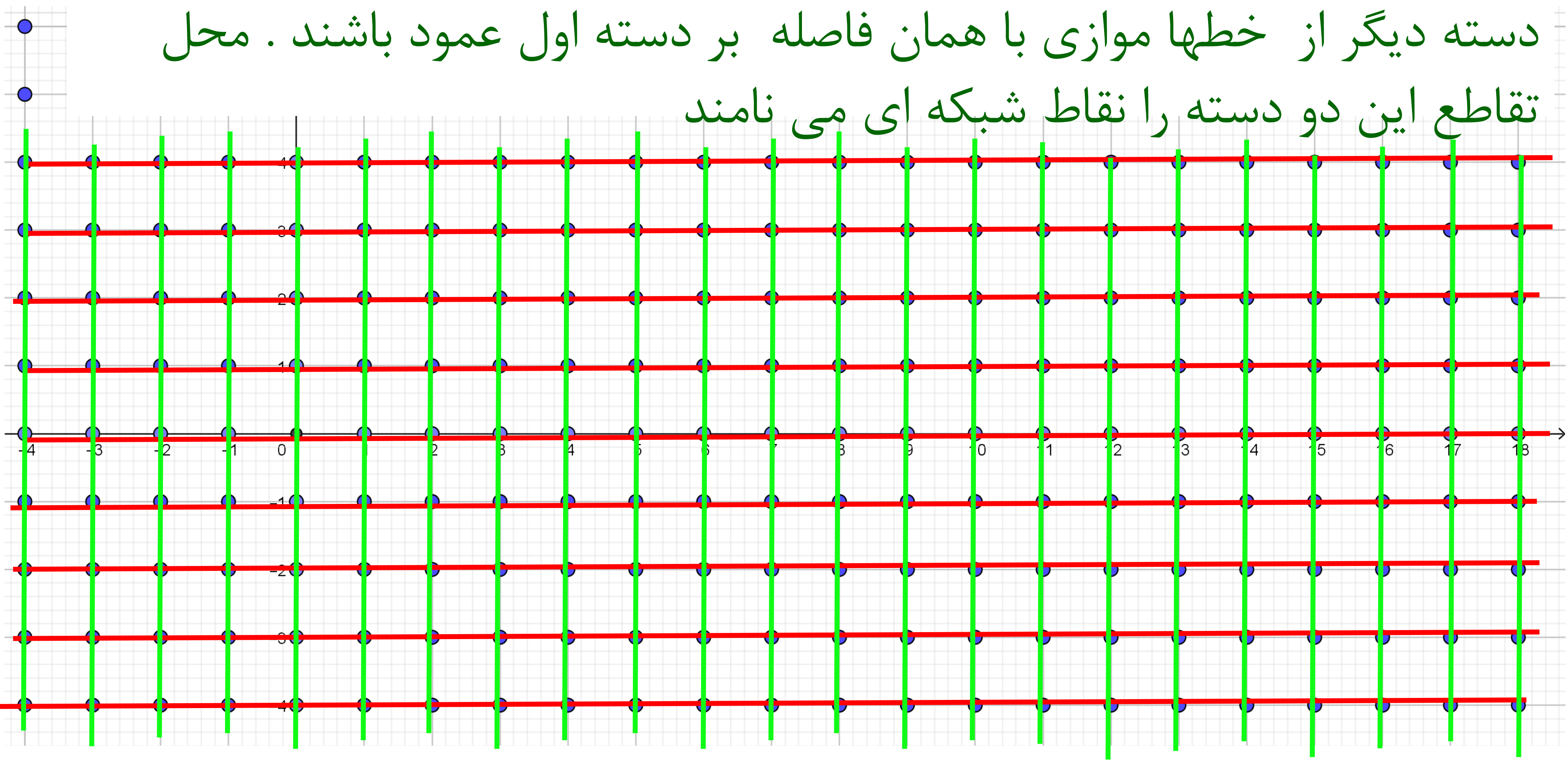
$$\rightarrow \left|\frac{1}{2}AB \times PE - \frac{1}{2}AC \times PF\right| = \frac{1}{2}a \times h_b$$

$$\rightarrow \left|\frac{1}{2}a \times PE - \frac{1}{2}a \times PF\right| = \frac{1}{2}a \times h_b \xrightarrow{\div\frac{1}{2}a} |PE - PF| = h_b$$

چند ضلعی شبکه ای و مساحت

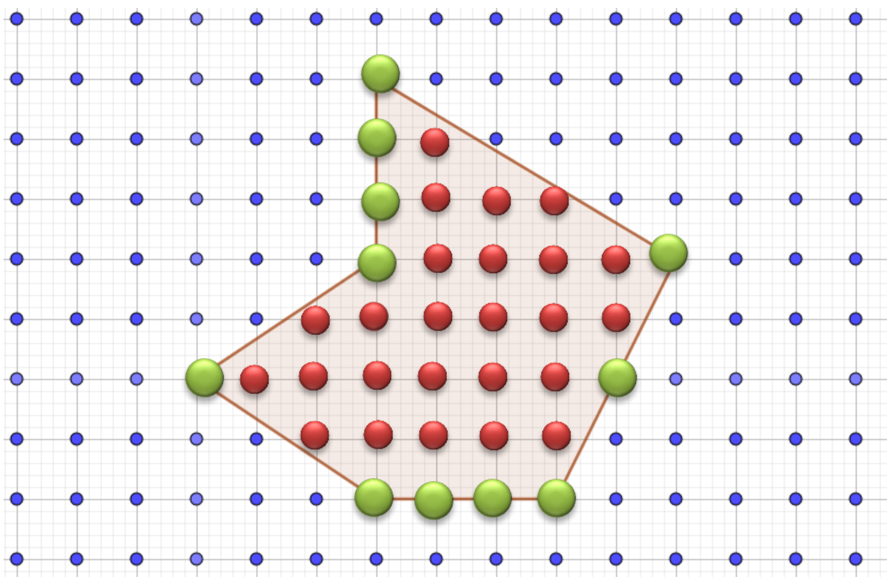
نقاط شبکه ای : مجموعه نقاطی از صفحه مختصات که طول و عرض آنها عدد صحیح باشد . نمونه ای از نقاط شبکه ای هستند.

در واقع اگر یک دسته خط موازی با فاصله های یکسان داشته باشیم و یک دسته دیگر از خطها موازی با همان فاصله بر دسته اول عمود باشند . محل تقاطع این دو دسته را نقاط شبکه ای می نامند



چند ضلعی شبکه ای و مساحت

چند ضلعی شبکه ای: اگر تمام رأس های یک چند ضلعی روی یک مجموعه نقاط شبکه ای قرار داشته باشند . آن چند ضلعی را چند ضلعی شبکه ای می نامند.



نقاط مرزی: به مجموعه نقاطی از نقاط شبکه ای که روی اضلاع یا رئوس آن چند ضلعی شبکه ای قرار می گیرند . نقاط مرزی آن چند ضلعی گفته می شود.

نقاط درونی : به مجموعه نقاطی از نقاط شبکه ای که درون چند ضلعی شبکه ای قرار می گیرند . نقاط درونی آن چند ضلعی گفته می شود.

توجه : در هر چند ضلعی شبکه ای

تعداد نقاط مرزی را با Boundary Point =b

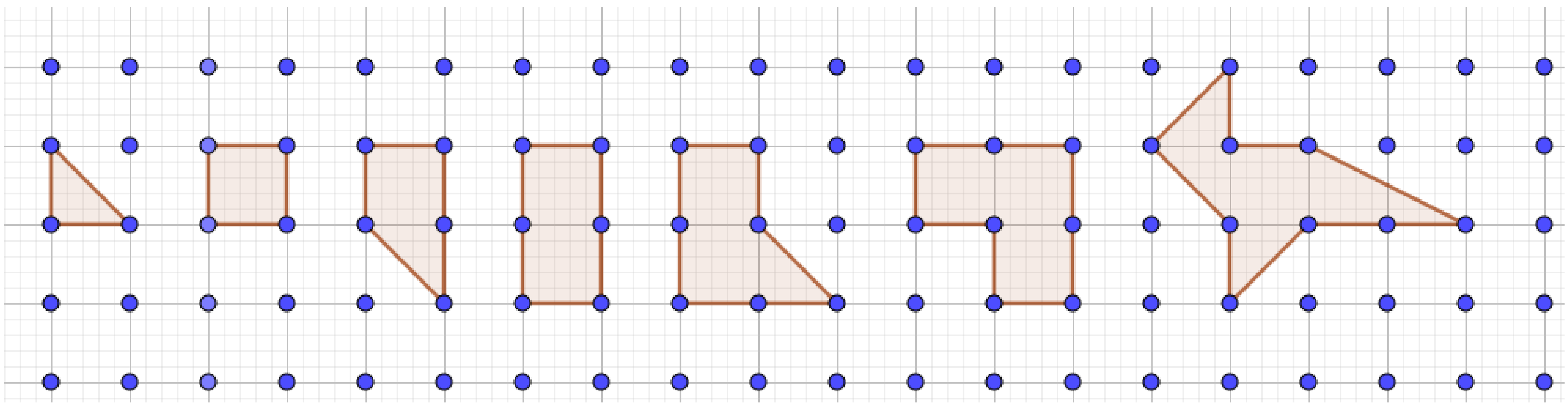
و تعداد نقاط درونی را با Interior Point =i نشان می دهند .

مثلا در شکل فوق : $b = 11, i = 25$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

چند ضلعی شبکه ای و مساحت

سوال ۱: با توجه به شکل مساحت هر یک از چند ضلعی های زیر را حساب کرده سپس با کامل کردن جدول ، یک نتیجه کلی بدست آورید.



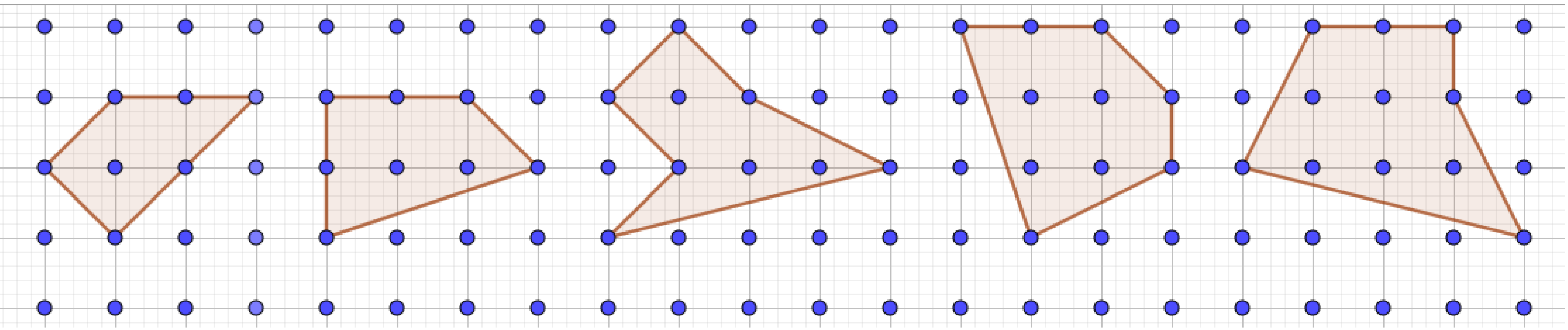
تعداد نقاط مرزی $= b$	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد نقاط درونی $= i$								
مساحت								
	2		2		2		2	

نتیجه: اگر یک چند ضلعی شبکه ای هیچ نقطه درونی نداشته باشد. می توان مساحت آن را بر حسب نقاط مرزی حساب کرد : $S = \frac{b}{2} - 1$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

چند ضلعی شبکه ای و مساحت

سوال ۲: با توجه به شکل مساحت هر یک از چند ضلعی های زیر را حساب کرده سپس با کامل کردن جدول ، یک نتیجه کلی بدست آورید.



تعداد نقاط مرزی $= b$	۶	۶	۶	۶	۶	۶	۶
تعداد نقاط درونی $= i$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$\frac{b}{2}-1$	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
مساحت	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

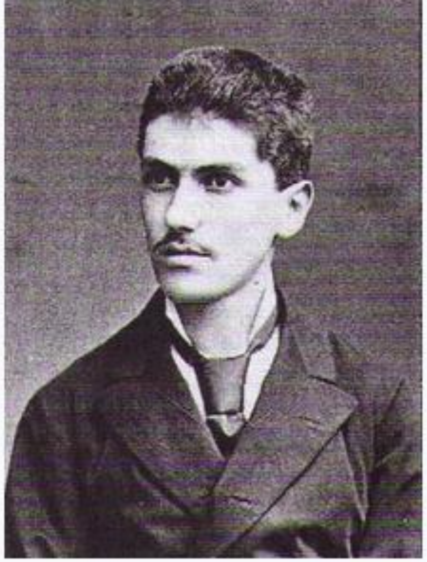
نتیجه: می توان مساحت هر چند ضلعی شبکه ای را بر حسب نقاط مرزی و درونی آن حساب کرد : $S=\frac{b}{2}-1+i$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

قضیه پیک

مساحت هر چند ضلعی شبکه ای برابر است با:

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$



زاده	۱۰ اوت ۱۸۵۹ وین
درگذشت	۲۶ ژوئیهٔ ۱۹۴۲ (۸۲ سال) اردوگاه کار اجباری ترزینشتات
ملیت	اتریش
محل تحصیل	دانشگاه وین
شناخته‌شده برای	Pick's formula Schwarz–Pick lemma Schwarz–Ahlfors–Pick theorem Nevanlinna–Pick interpolation
موقعیت‌های علمی	
موضوع ها	ریاضیات
مؤسسه‌ها	دانشگاه کارلف

گئورگ الکساندر پیک

۱۰Georg Alexander Pick

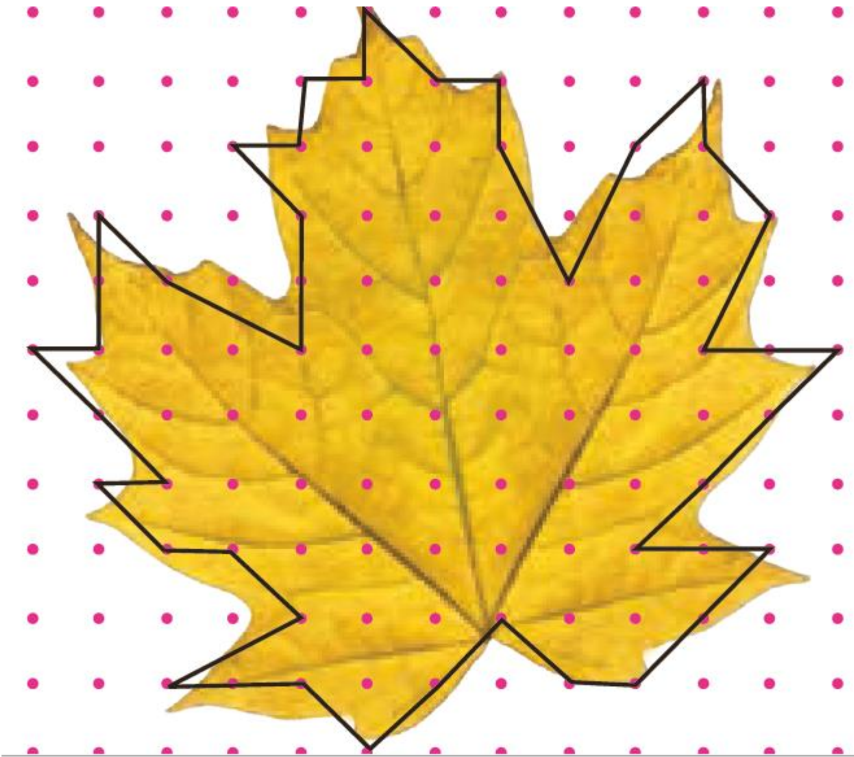
اوت ۱۸۵۹ – ۲۶ ژوئیه ۱۹۴۲

یک دانشمند در زمینه ریاضیات اهل اتریش بود.

به کمک قضیه پیک می توان مساحت تقریبی شکل های نامنظم هندسی را تعیین کرد.

اثبات قضیه پیک خارج از برنامه درسی است . لذا بدون اثبات فقط از فرمول پیک استفاده می کنیم

قضیه پیک



کار درکلاس : اگر فاصله نقطه های شبکه ای یک سانتی متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به طور تقریبی محاسبه کنید.

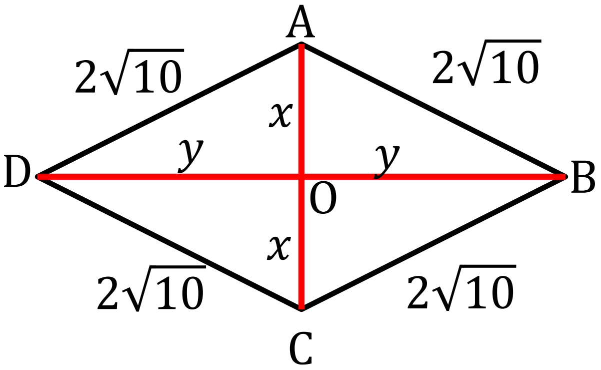
واضح است که با کوچک تر کردن واحد می توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

پاسخ :

$$b = 44\ , i = 45 \rightarrow S \simeq \frac{b}{2} - 1 + i = 22 - 1 + 45 = 66\ cm^2$$

تمرین

۱ـ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.



پاسخ :

$$\frac{AC}{BD}=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{2x}{2y}=\frac{1}{3}\rightarrow y=3x$$

$$\Delta OAB:\ OA^2+OB^2=AB^2\rightarrow x^2+y^2=(2\sqrt{10})^2$$

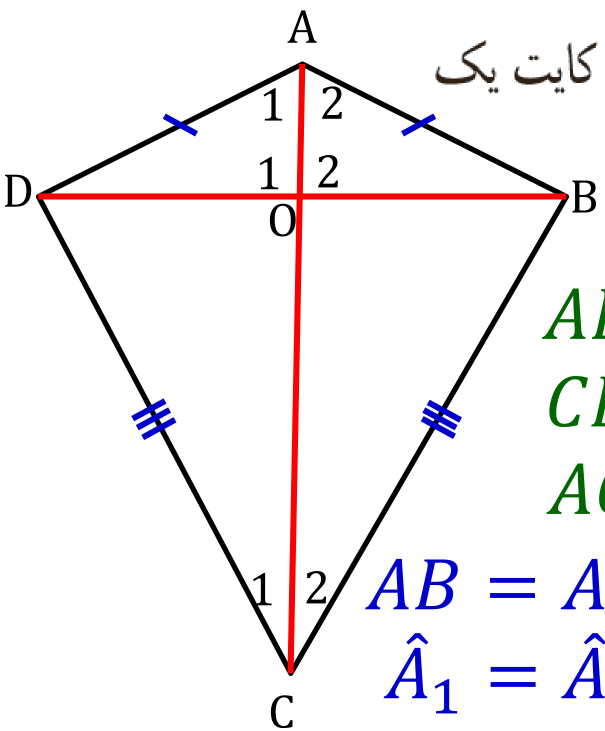
$$\xrightarrow{y=3x} x^2+9x^2=4\times 10\rightarrow 10x^2=40\rightarrow x^2=4\rightarrow x=2$$

$$\rightarrow AC=4\ ,BD=12\rightarrow S_{\blacksquare ABCD}=\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



پاسخ :

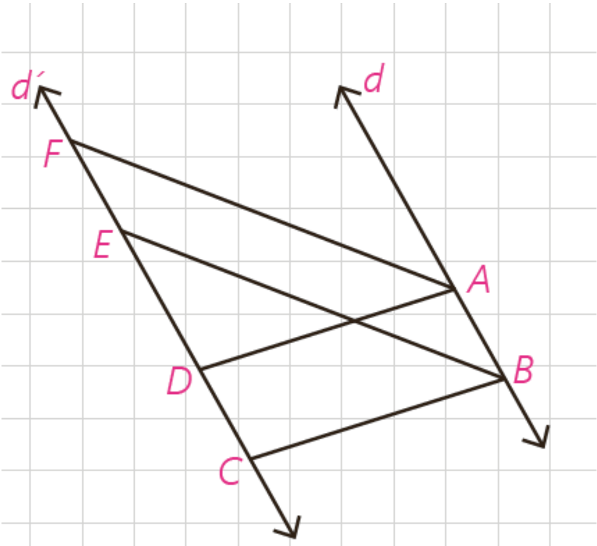
$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ CD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \rightarrow \left| \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ OA = OA \end{array}\right\} \rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD \rightarrow \left| \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \\ OB = OD \end{array}\right.$$

پس قطر AC عمود منصف قطر BD است.

$$\rightarrow AC \perp BD, AC = 8, BD = 6 \rightarrow S_{\blacksquare ABCD} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

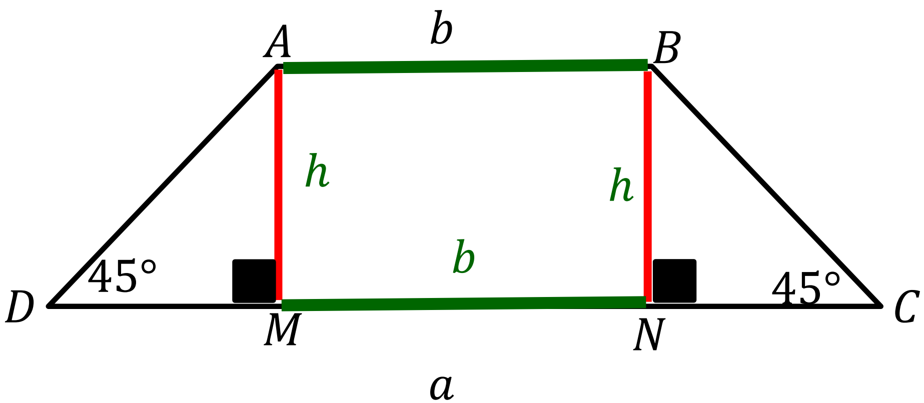
۳ـ در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



پاسخ : فرض کنیم فاصله دو خط موازی d ,d' برابر h باشد . در این صورت چون AB قاعده مشترک هر دو متوازی الاضلاع است . می توان نتیجه گرفت که :

$$S_{\blacksquare ABCD} = S_{\blacksquare ABEF} = AB \times h$$

۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



پاسخ : عمودهای AM و BN را بر قاعده CD وارد می کنیم

$$AB \parallel CD, AM \perp CD, BN \perp CD \rightarrow MN = AB = b\,, AM = BN = h$$

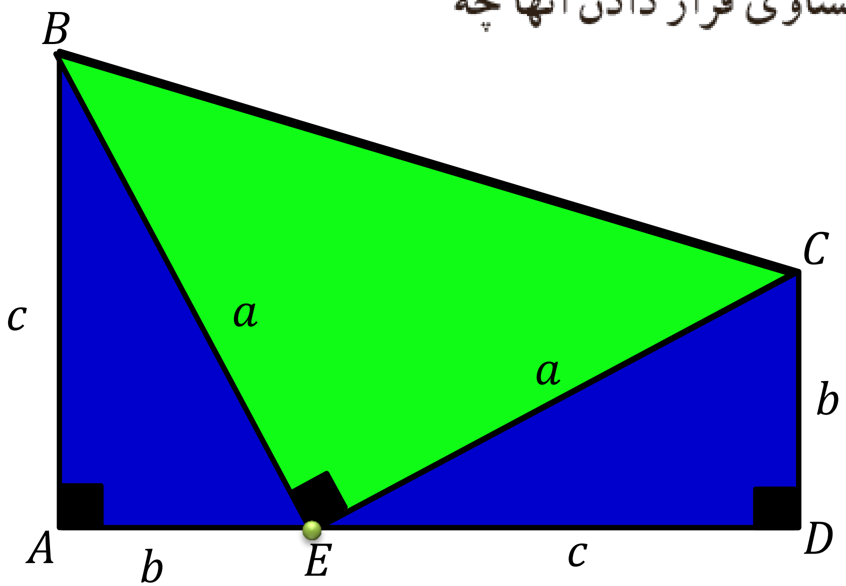
$$\Delta ADM \cong BCN \rightarrow DM = CN = \frac{a-b}{2}$$

$$\Delta ADM\ :\ \hat{A} = \widehat{M} = 45^\circ \rightarrow AM = DM \rightarrow h = \frac{a-b}{2}$$

$$S_{\blacksquare ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AM = \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۵ـ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



$$S_{\blacksquare ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CDE} + S_{\Delta BCE}$$

$$\to S_{\blacksquare ABCD} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}aa = bc + \frac{1}{2}a^2 \quad (1)$$

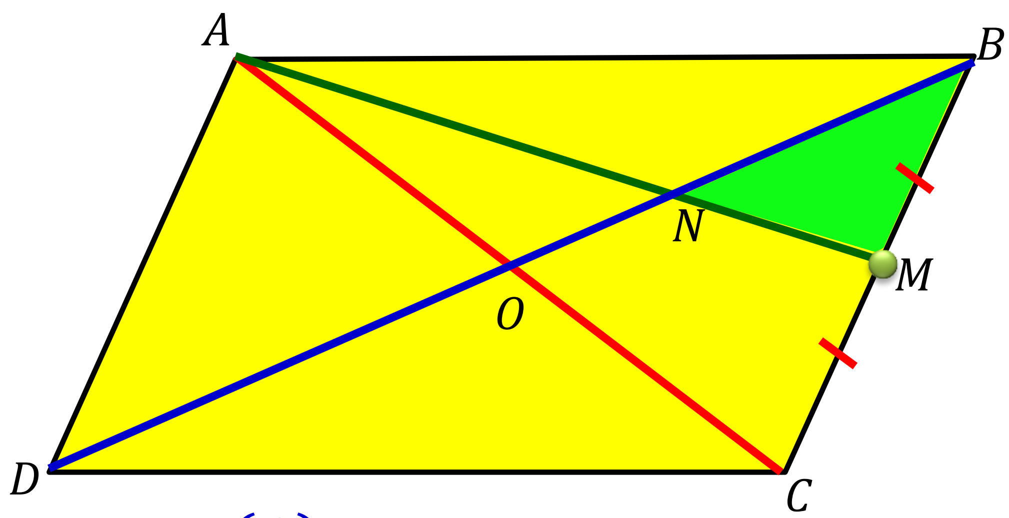
$$\to S_{\blacksquare ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AD = \frac{1}{2}(c+b)(c+b) \quad (2)$$

$$(1),(2) \to \frac{1}{2}(c+b)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2 \xrightarrow{\times 2} (c+b)^2 = 2bc + a^2$$

$$\to b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \to b^2 + c^2 = a^2$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۶ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید : $S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$.



$$\Delta ABC \cong \Delta ACD$$

$$\rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} S_{\blacksquare ABCD} \qquad (1)$$

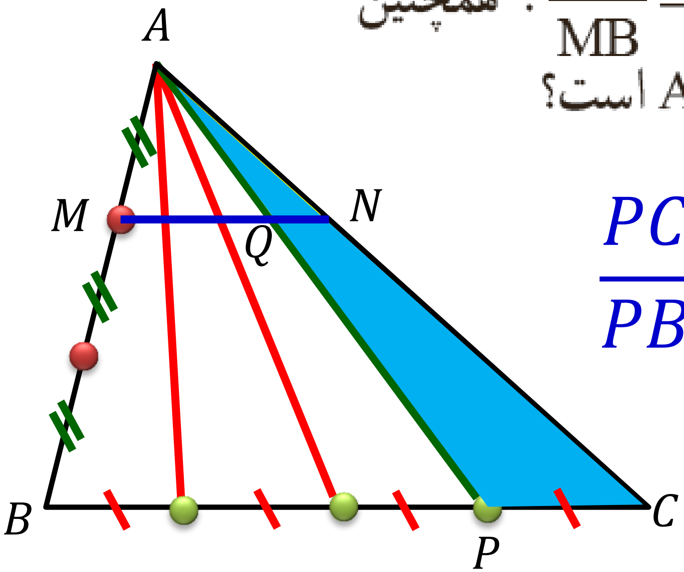
$$\Delta ABC : BM = MC \,, OA = OC$$

پس AM و OB میانه های مثلث ABC هستند. در نتیجه :

$$\rightarrow S_{\Delta BMN} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} \xrightarrow{(1)} S_{\Delta BMN} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} S_{\blacksquare ABCD}\right) = \frac{1}{12} S_{\blacksquare ABCD}$$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



$$\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}\to\frac{PC}{BC}=\frac{1}{4}\to\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}$$

$$\to S_{\Delta APC}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}\qquad(1)$$

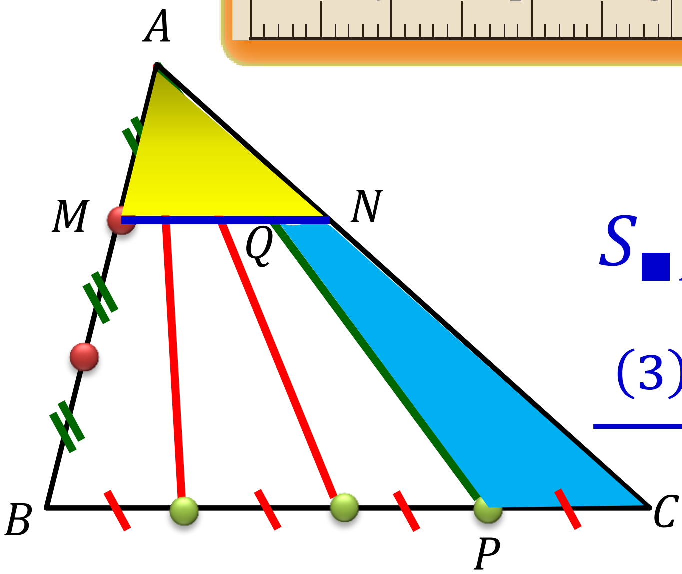
$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}\to\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}\ ,MN\parallel BC\to\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\qquad(2)$$

$$MN\parallel BC\to QN\parallel PC\xrightarrow{(2)}\Delta AQN\sim\Delta APC\ ,k=\frac{1}{3}$$

$$\to\frac{S_{\Delta AQN}}{S_{\Delta APC}}=k^2=\frac{1}{9}\to S_{\Delta AQN}=\frac{1}{9}S_{\Delta APC}\quad(3)\xrightarrow{(1)}S_{\Delta AQN}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$$

$$\to S_{\Delta AQN}=\frac{1}{36}S_{\Delta ABC}$$

تمرین



روش اول

$$S_{\blacksquare PQNC}=S_{\Delta APC}-S_{\Delta AQN}$$

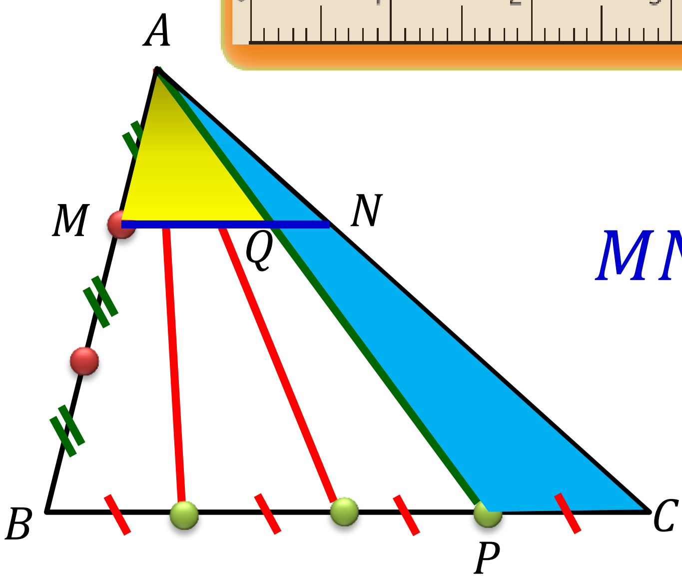
$$\xrightarrow{(3)} S_{\blacksquare PQNC}=S_{\Delta APC}-\frac{1}{9}S_{\Delta APC}=\frac{8}{9}S_{\Delta APC}$$

$$\xrightarrow{(1)} S_{\blacksquare PQNC}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{2}{9}S_{\Delta ABC} \qquad (4)$$

$$\Delta ABC: MN \parallel BC \to \Delta AMN \sim \Delta ABC, k=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$$

$$\to \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=k^2=\frac{1}{9}\to S_{\Delta AMN}=\frac{1}{9}S_{\Delta ABC} \qquad (5)$$

$$(4),(5)\to S_{\blacksquare BPQM}=S_{\Delta ABC}-\left(\frac{2}{9}S_{\Delta ABC}+\frac{1}{9}S_{\Delta ABC}\right)=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$$



روش دوم

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{MQ}{BP} = \frac{QN}{PC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{MQ}{QN} = \frac{BP}{PC} = 3 \rightarrow \frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta AQN}} = 3$$

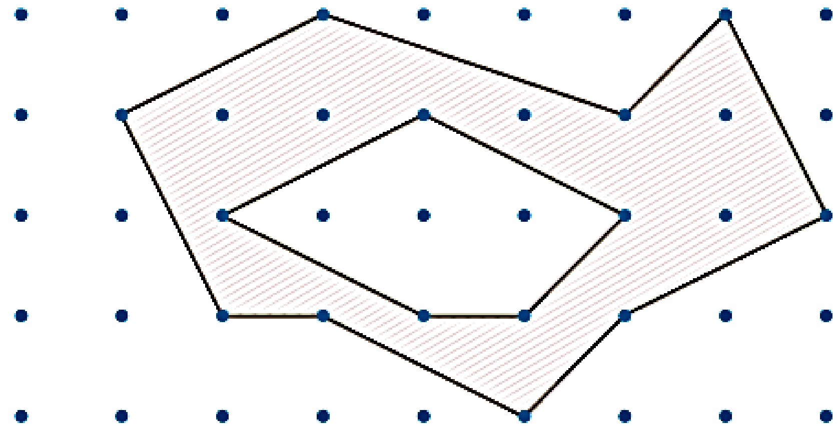
$$\rightarrow S_{\Delta AMQ} = 3 \times \frac{1}{36} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC} \qquad (4)$$

$$PC = \frac{1}{4} BC \rightarrow S_{\Delta APC} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \qquad (5)$$

$$(4),(5) \rightarrow S_{\blacksquare BPQM} = S_{\Delta ABC} - \left(\frac{1}{12} S_{\Delta ABC} + \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}\right)$$

$$\rightarrow S_{\blacksquare BPQM} = \frac{2}{3} S_{\Delta ABC}$$

۸ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی : مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)



فرض کنیم مساحت چند ضلعی داخلی و بیرونی به ترتیب برابر S_1 و S_2 باشد :

$$S_1 = \frac{b_1}{2} - 1 + i_1 = \frac{5}{2} - 1 + 3 = \frac{9}{2}$$

$$S_2 = \frac{b_2}{2} - 1 + i_2 = \frac{9}{2} - 1 + 13 = \frac{33}{2}$$

$$S = S_2 - S_1 = \frac{33}{2} - \frac{9}{2} = 12$$

تمرین

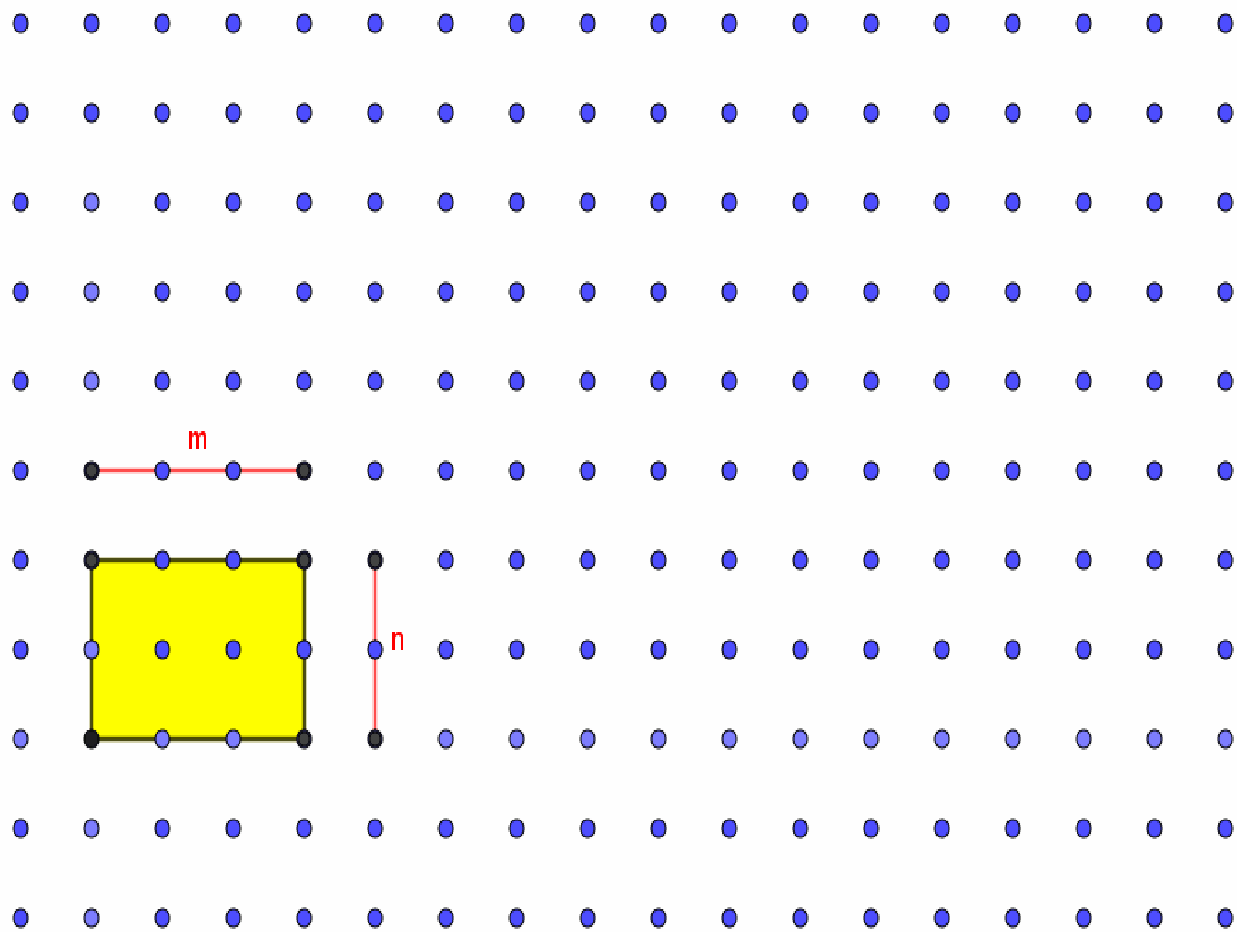
۹ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

$$S = m \times n = 3 \times 2 = 6$$

$$b = 2(m+n) = 2(3+2) = 10$$

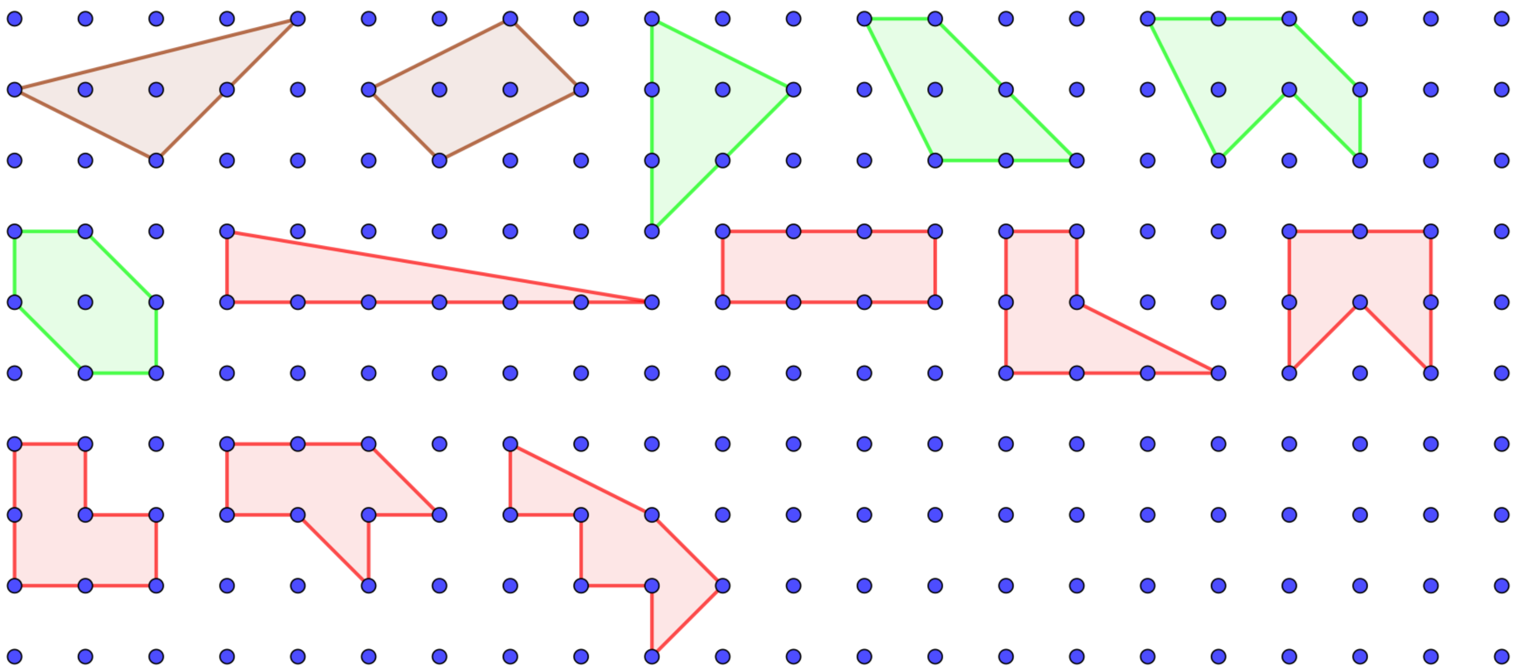
$$i = (m-1)(n-1) = 2 \times 1 = 2$$

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i = \frac{10}{2} - 1 + 2 = 6$$



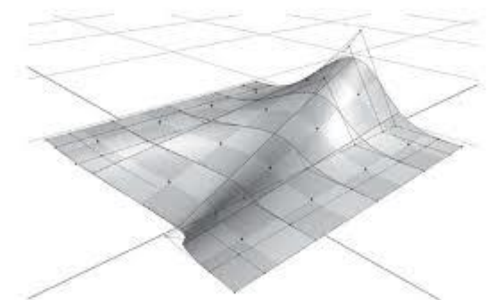
تمرین

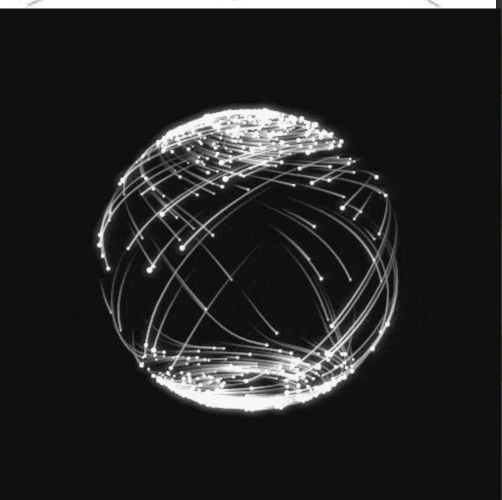
۱۰ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

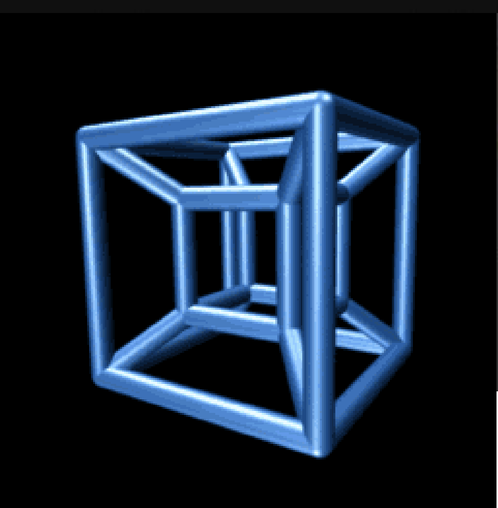


تعداد نقاط مرزی $= b$	۴	۶	۸
تعداد نقاط درونی $= i$	۲	۱	۰
$\frac{b}{2} - 1 + i$	۳	۳	۳

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان





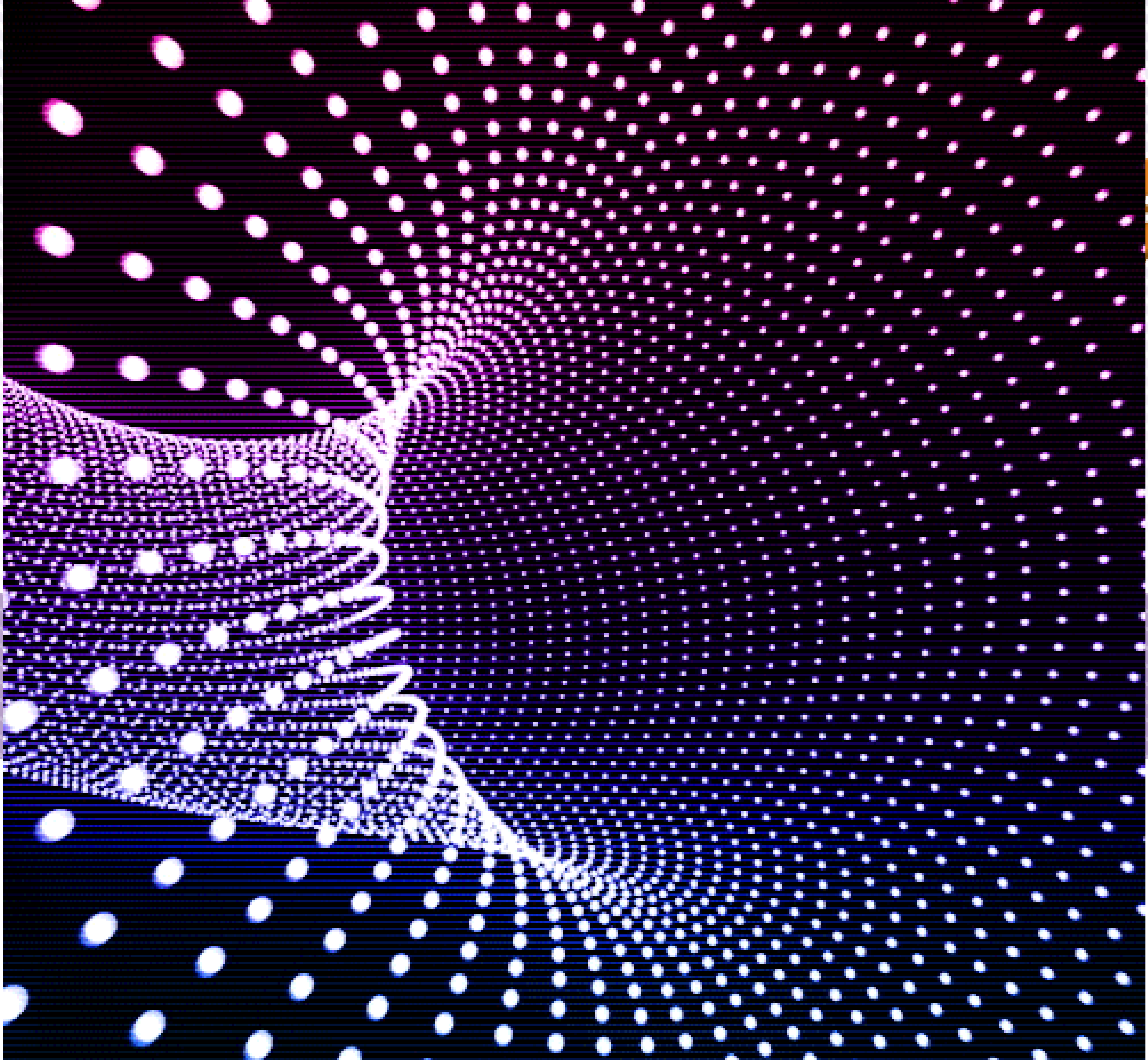


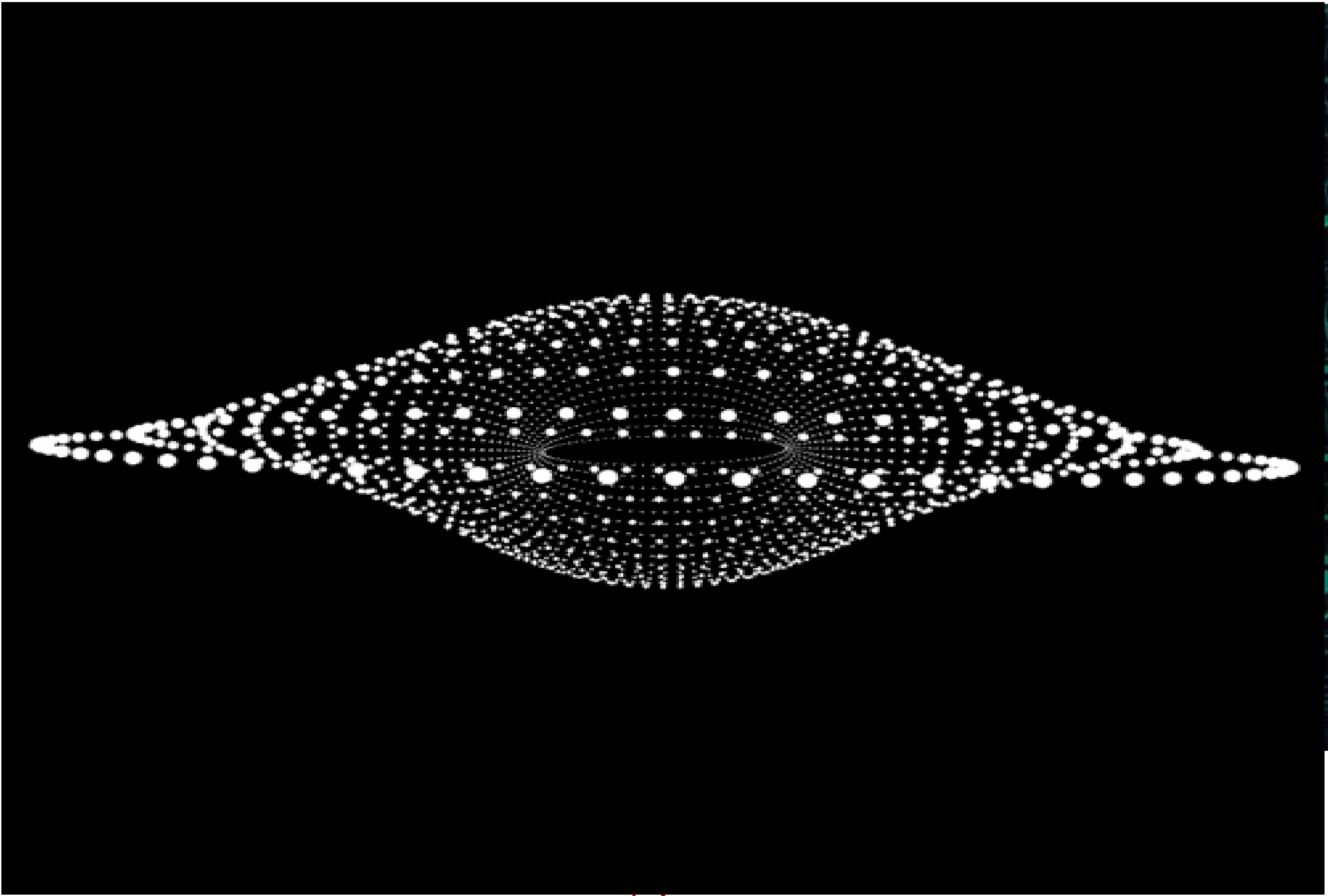
۴

فصل چهارم

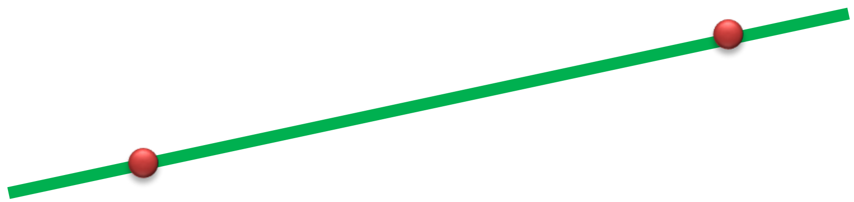
تجسم فضایی

تصویر سمت راست، آرامگاه ابوعلی سینا، واقع در همدان است. در مورد تصویر سمت چپ چه حدسی می‌زنید؟

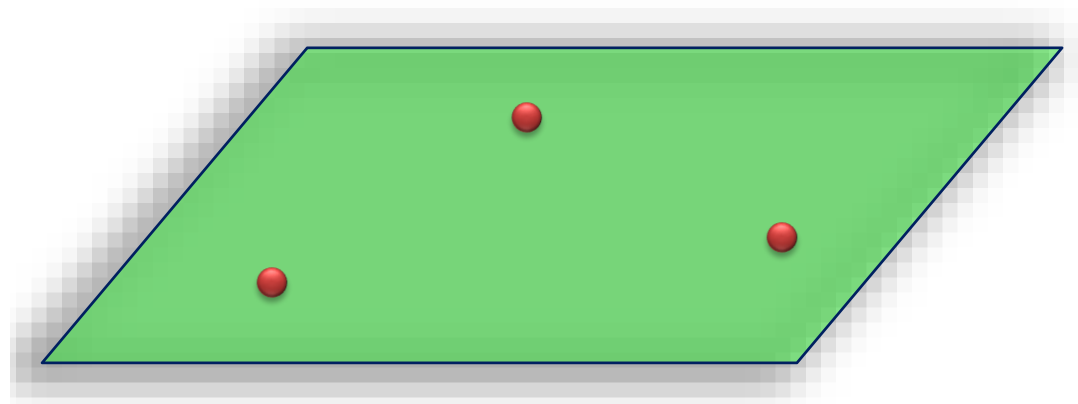




به ازای هر دو نقطه متمایز تنها یک خـط وجـود دارد کـه از آنهـا می‌گذرد.

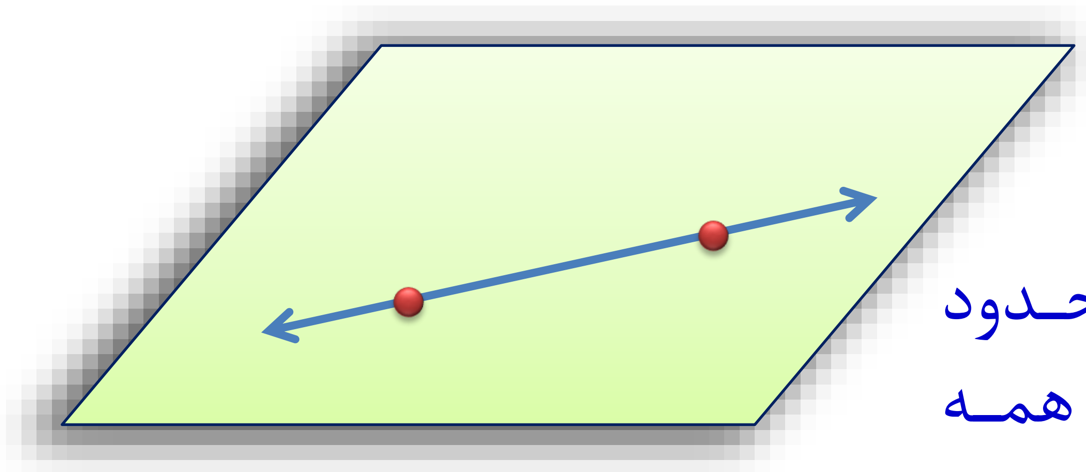


از هر سه نقطه متمایز در فضا که بر یک خط قرار ندارند ، یک و تنها یک صفحه، می‌گذرد.

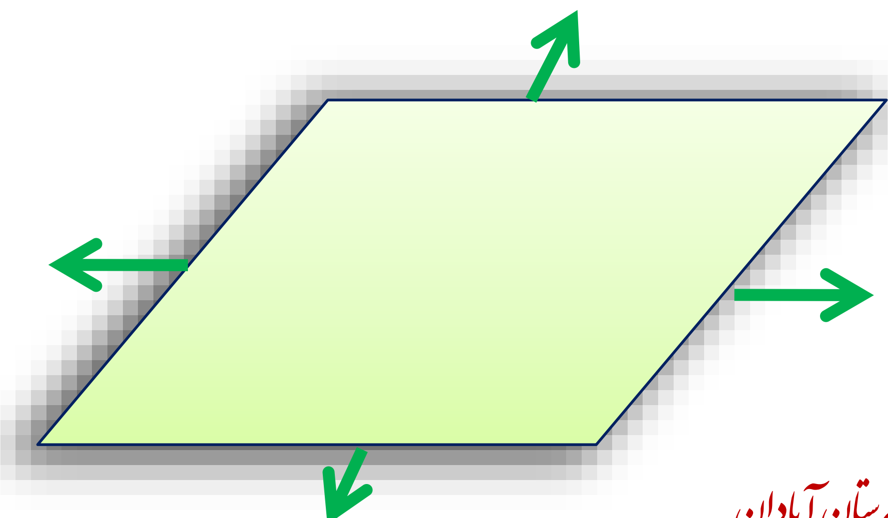


نتیجه : برای نامگذاری صفحه حداقل به سه نقطه از آن صفحه نیاز داریم.

اگر دو نقطه متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

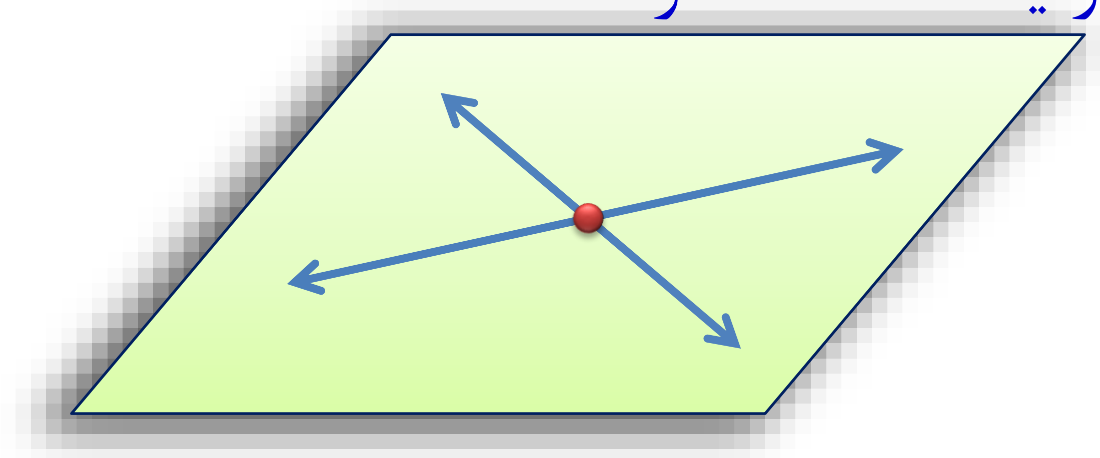


تذکر: خط از هر دو طـرف نامحـدود است. صفحه نیز در دو بعـد از همـه طرف نامحـدود می‌باشـد، بنـابراین، طبیعـی اسـت کـه تمـام صـفحه را نمی‌توان در یک تصویر، نشـان داد و آن چه کـه مشـاهده می‌شـود تنهـا بخشی از صفحه است.

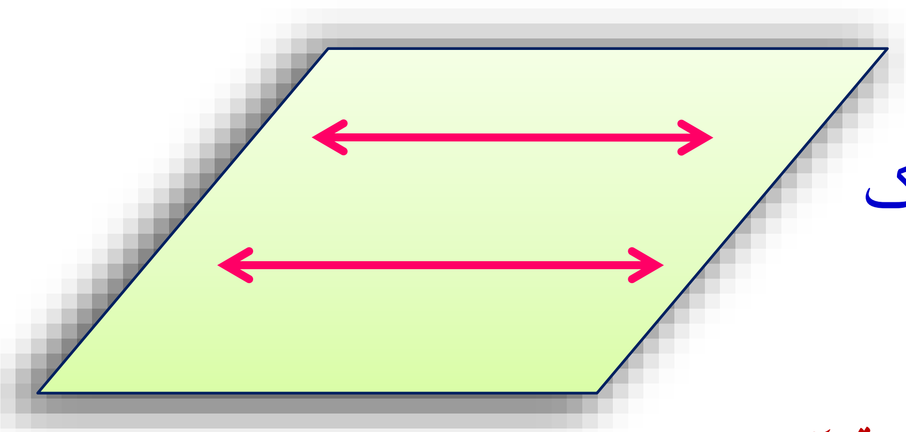


وضعیت نسبی دو خط در یک صفحه

دوخط در یک صفحه یا فقط در یک نقطه مشترک انـد.
(دو خط متقاطع)

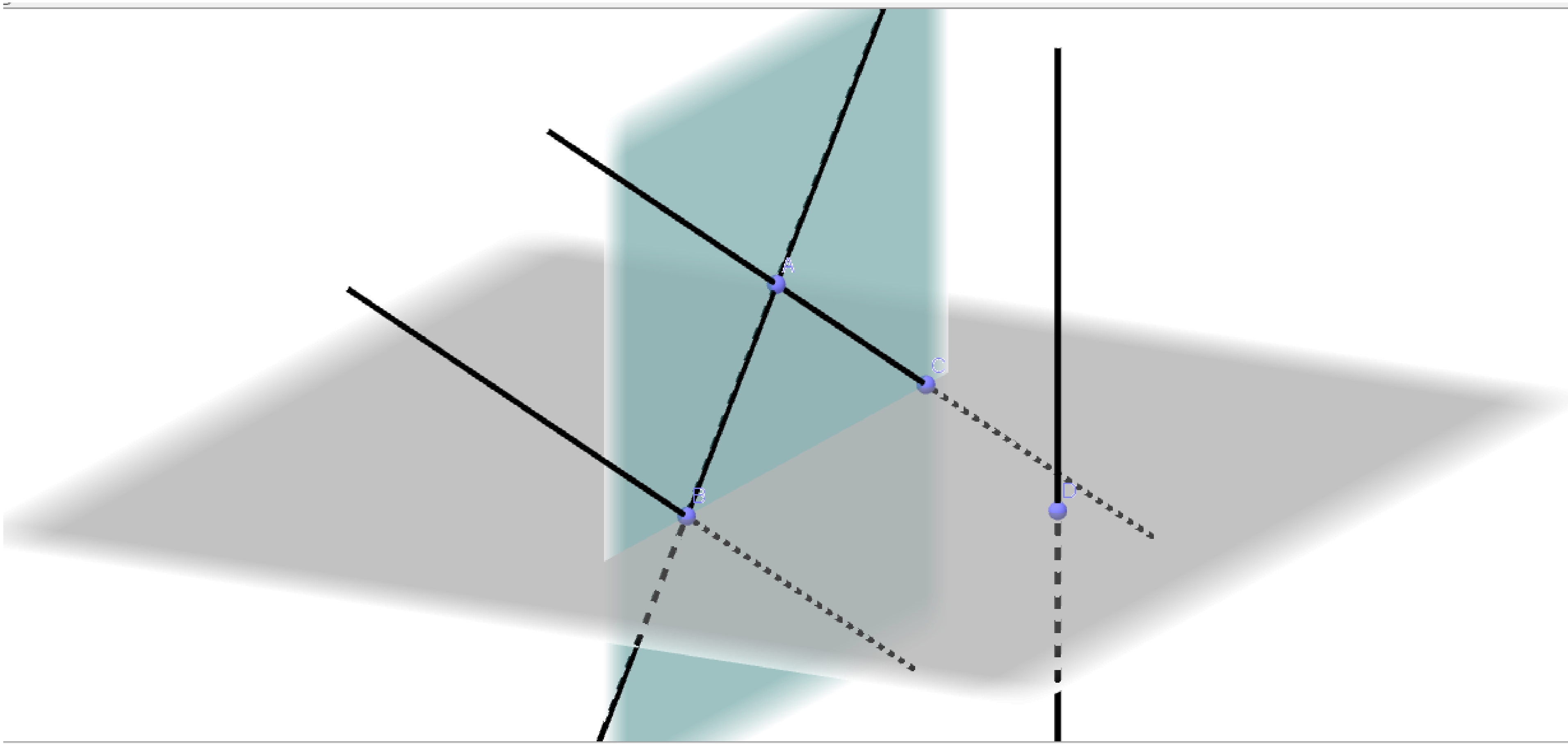


یا هیچ نقطه اشتراکی ندارند . (دو خط موازی)



تذکر : دو خط منطبق برهم بعنوان یک خط در نظر گرفته می شوند.

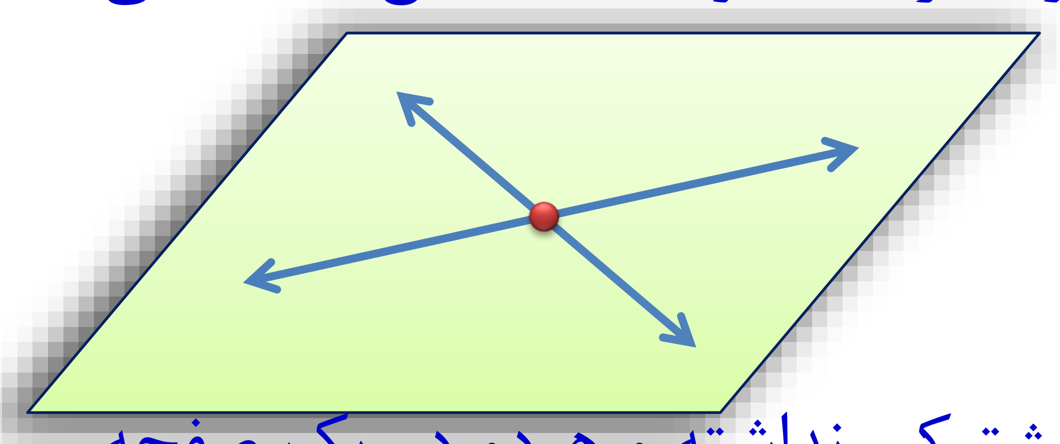
وضعیت نسبی دو خط در فضا



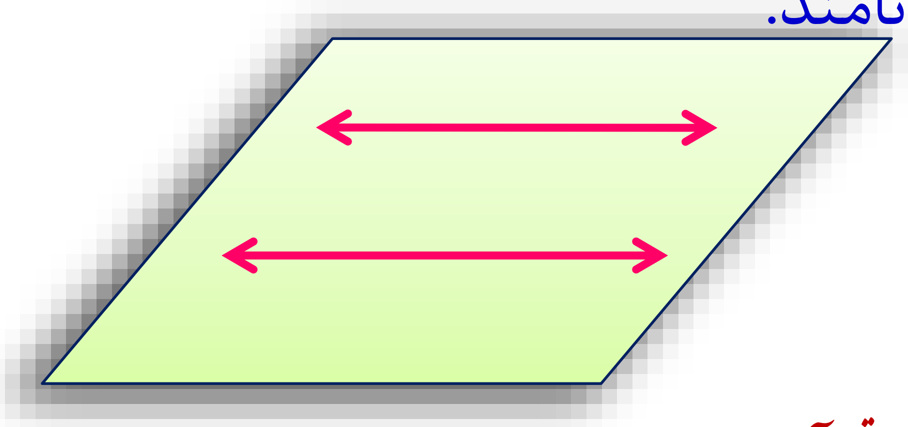
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

وضعیت نسبی دو خط در فضا

۱- دوخط درفضا که فقط در یک نقطه مشترک اند. را دو خط متقاطع می نامند . همواره صفحه ای وجود دارد که دو خط متقاطع به تمـامی در آن قرار دارند.

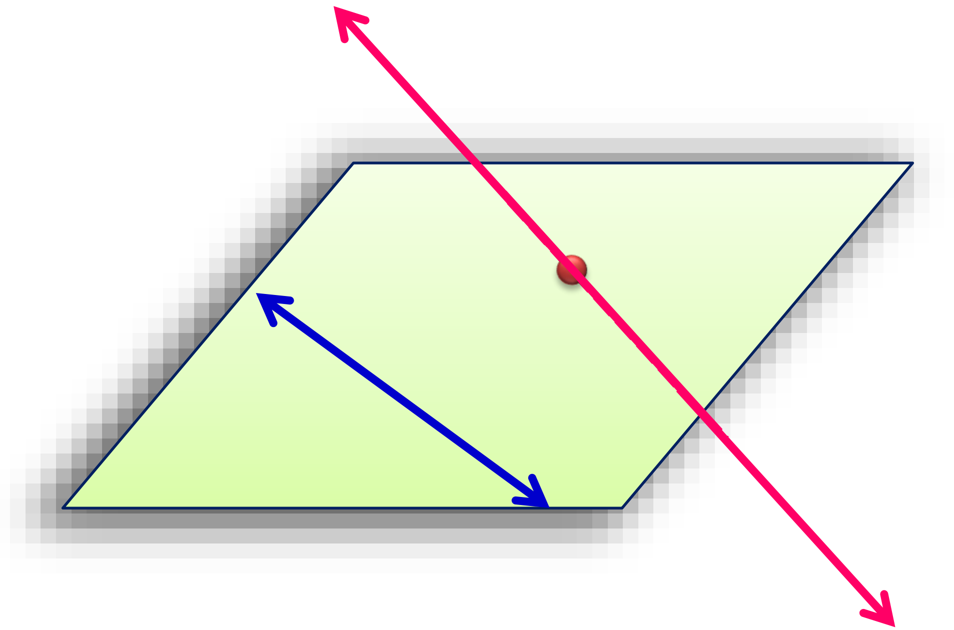


۲- دوخط درفضا که هیچ نقطه مشترکی نداشته و هردو در یک صفحه قرار داشته باشند را دو خط موازی می نامند.



وضعیت نسبی دو خط در فضا

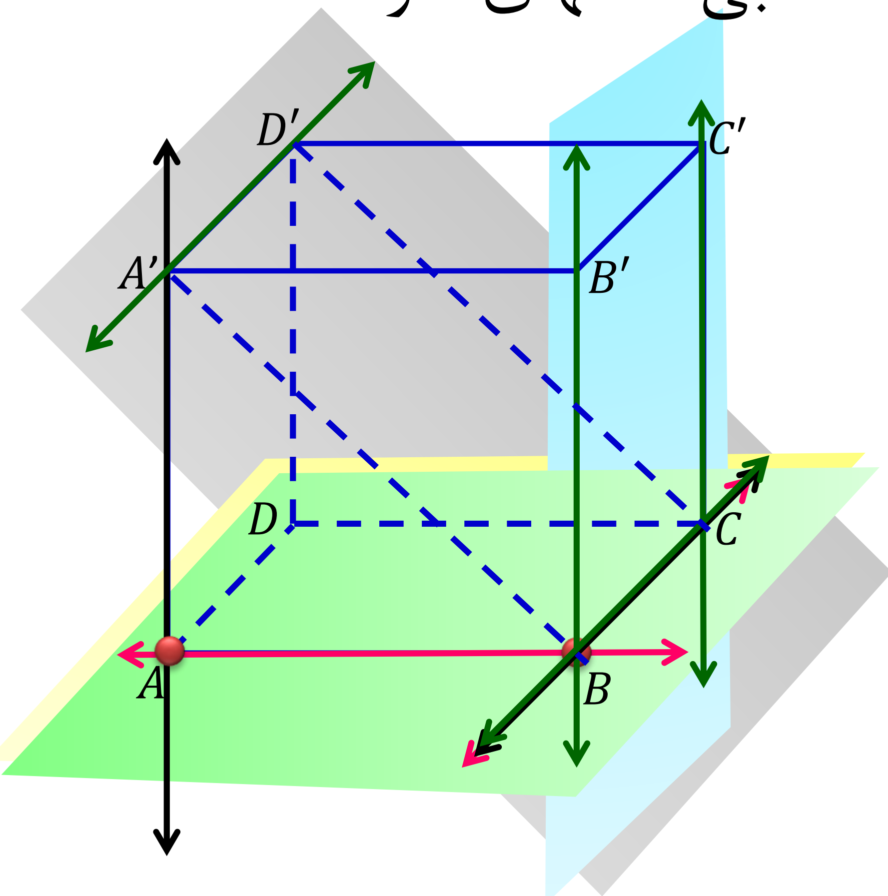
۳- دو خط درفضا که نتوان آنها را در یک صفحه قرار داد را دو خط متنافر می نامند



نتیجه۱ : دو خط متنافر هیچ نقطه اشتراکی ندارند.

نتیجه۲ : دو خط در فضا یا متقاطع اند یا موازی اند یا متنافر.

مثال ۱ : با توجه به مکعب مقابل وضعیت نسبی خطهای خواسته شده را تعیین کنید.



الف : AB,BC ب : CC',BB'

ج : AA',BC د : $A'D',BC$

پاسخ :

الف : AB,BC در نقطه B متقاطع اند

ب : CC',BB' موازی اند.

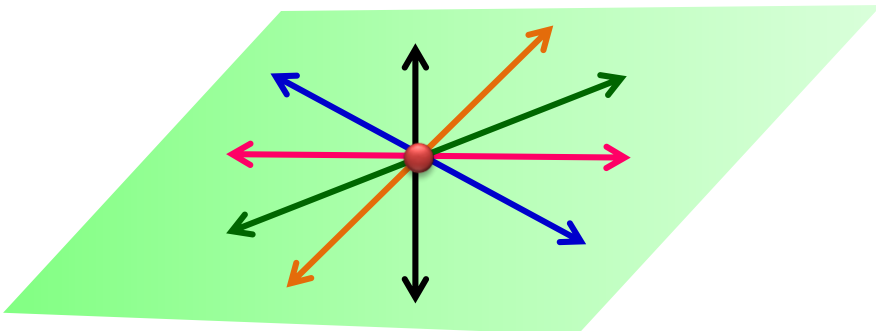
ج : AA',BC متنافر اند.

د : $A'D',BC$ موازی اند.

مثال ۲ : به سوال های زیر پاسخ دهید.

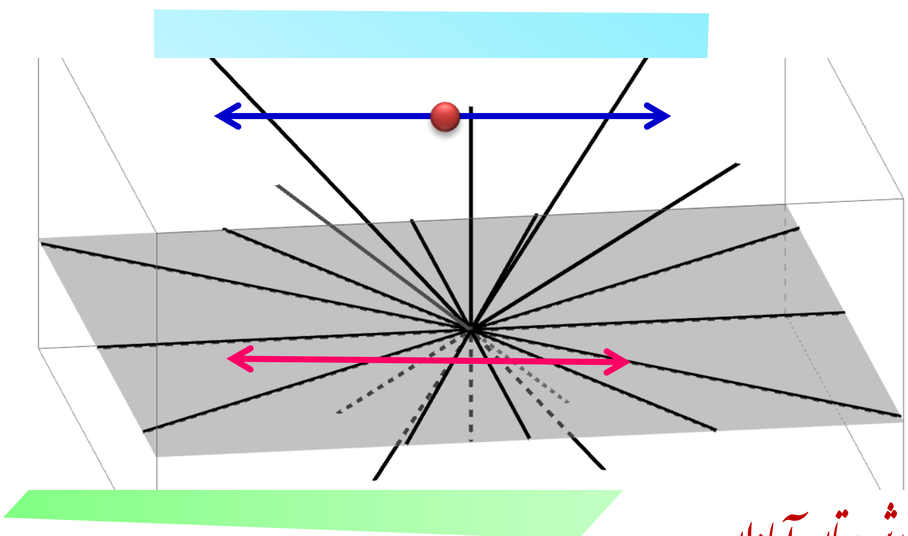
الف : در یک صفحه از هر نقطه چند خط می گذرد ؟ در فضا چطور ؟

ب : در یک صفحه از هر نقطه خارج یک خط چند خط به موازات آن می توان رسم کرد ؟ در فضا چطور ؟

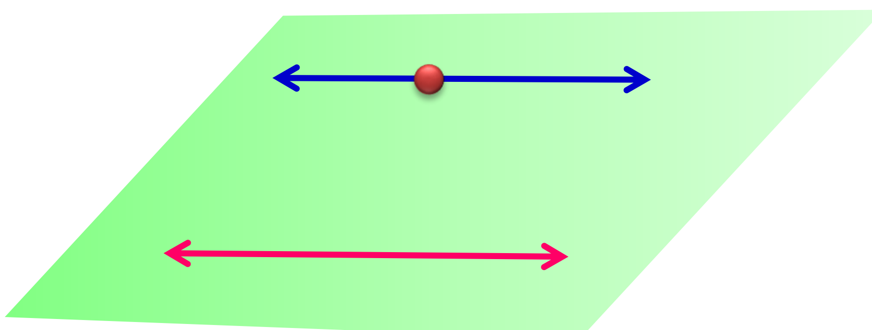


پاسخ :

الف : بی شمار – بی شمار



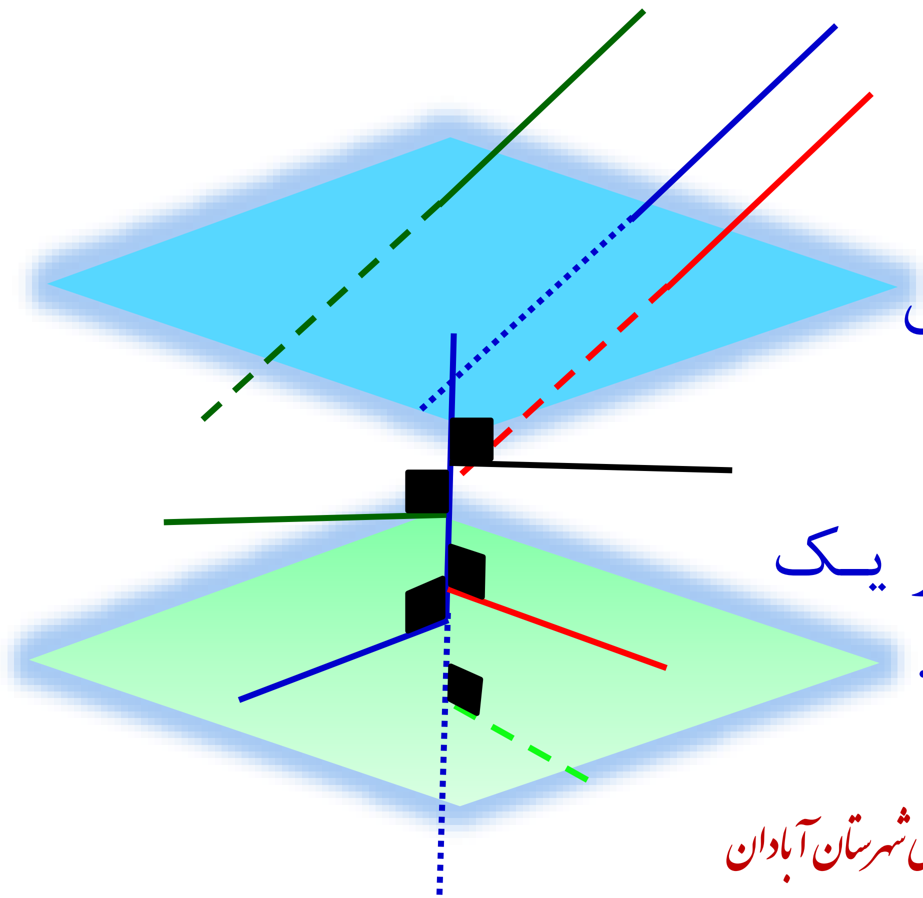
ب : فقط یک خط – فقط یک خط



مثال ۳ : به سوال های زیر پاسخ دهید.

الف : می دانیم در صفحه ، دو خط موازی با یک خط مـوازی انـد. آیـا در فضا هم اینگونه است ؟

ب : می دانیم در صفحه ، دو خط عمود بریک خط موازی اند. آیا در فضا هم اینگونه است ؟



پاسخ :

الف : بله ، در فضا نیز دو خـط مـوازی با یک خط موازی اند.

ب : خیر ، در فضا دو خـط عمـود بـر یـک خط می توانند موازی یا متنافر باشند.

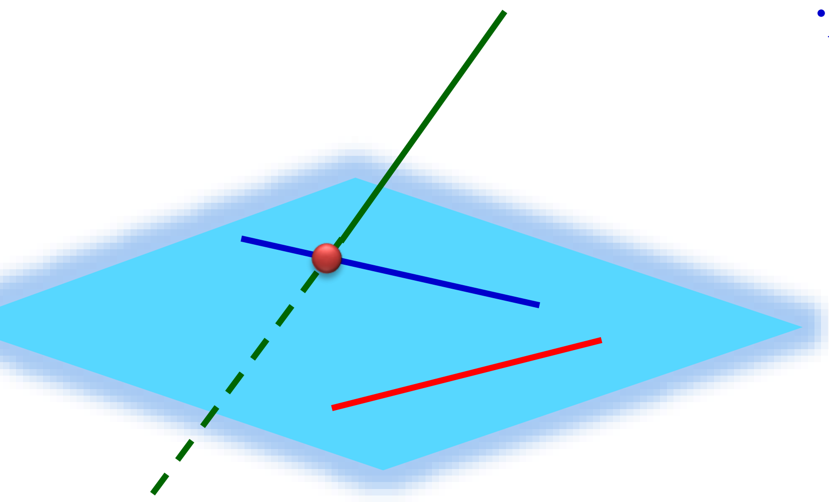
مثال ۴ :

اگر خط d با صفحه p متقاطع باشند . آنگاه وضعیت نسبی خط d با یک خط دلخواه از صفحه p چه می تواند باشد ؟

پاسخ :

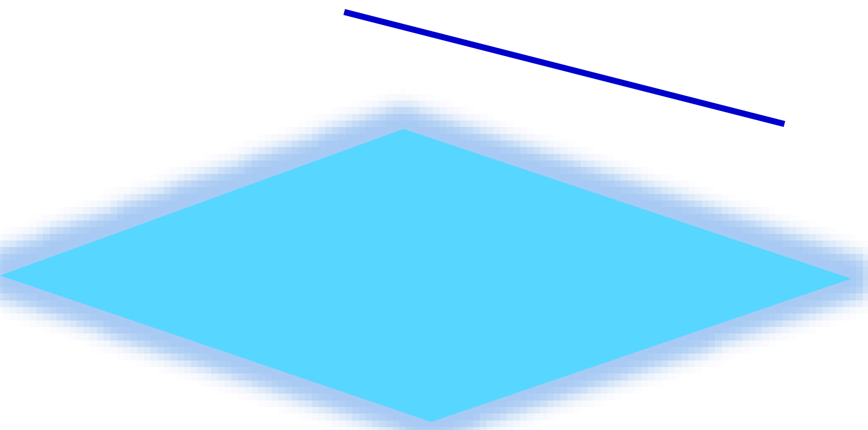
اگر خط l خط دلخواهی از صفحه p باشد .

در این صورت d, l یا متقاطع اند یا متنافر.

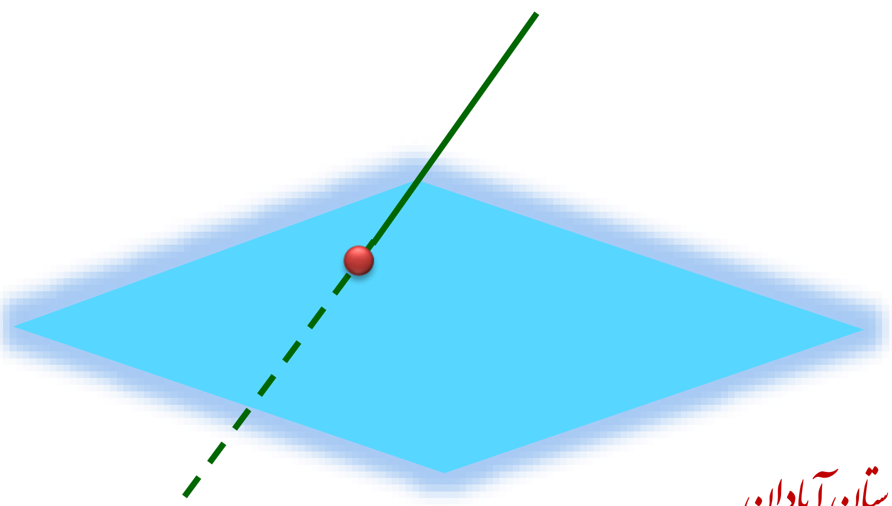


وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

۱- اگر خط و صفحه هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. آنگاه خط و صفحه ، موازی اند.

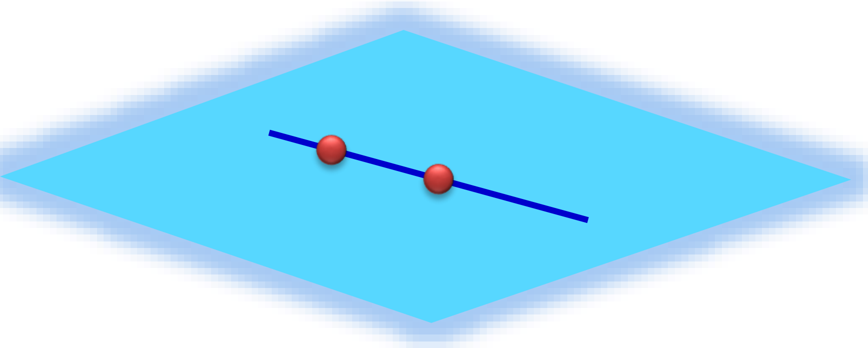


۲- اگر خط و صفحه فقط در یک نقطه مشترک باشند. آنگاه خط و صفحه ، متقاطع اند.



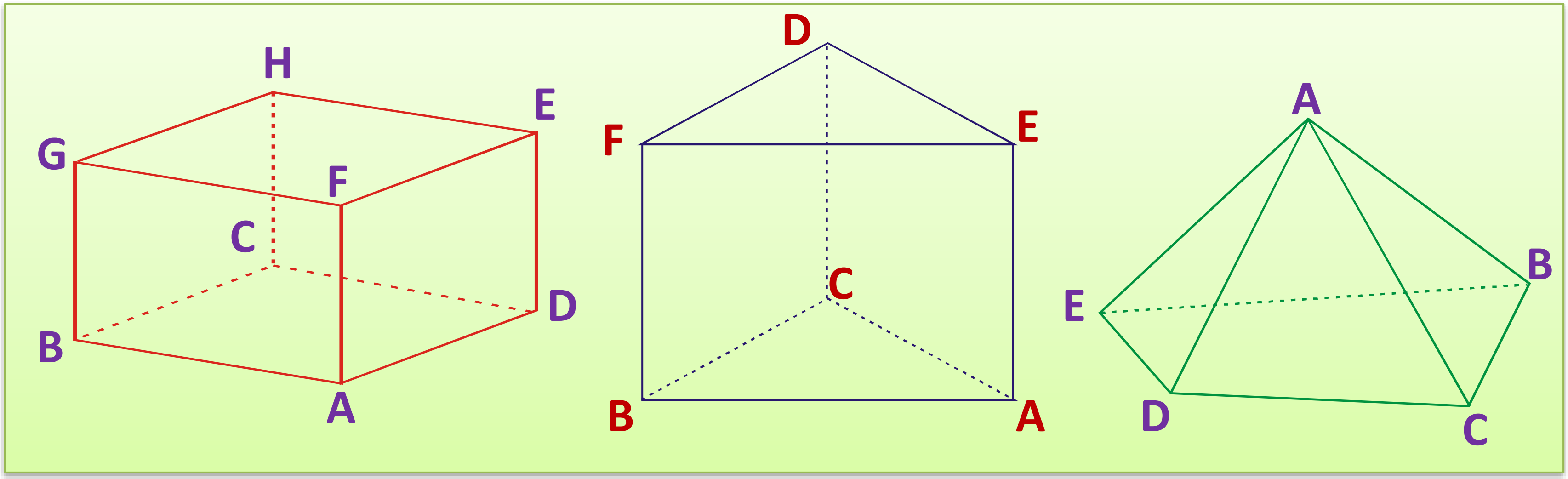
وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

۳- اگر خط و صفحه بیشتر از یک نقطه مشترک داشته باشند آنگاه خط بر صفحه واقع است.



نتیجه : یک خط و صفحه در فضا ، نسبت به هم یا موازی اند یا متقاطع یا خط بر صفحه واقع است.

تمرین: با توجه به شکل های زیر به سؤالات پاسخ دهید.



الف) وضعیت دو خط AB و EH نسبت به هم، در مکعب مستطیل چگونه است؟

وضعیت دو خط AB و CD نسبت به هم، در منشور چگونه است؟

وضعیت دو خط AB و AD نسبت به هم، در هرم چگونه است؟

ب) در مکعب مستطیل دو خط متنافر با خط AB بیابید.

در منشور دو خط موازی با خط AE بیابید.

در هرم چند خط متقاطع با خط AB می‌توانید بیابید؟

مثال ۱ : به سوالات زیر پاسخ دهید :

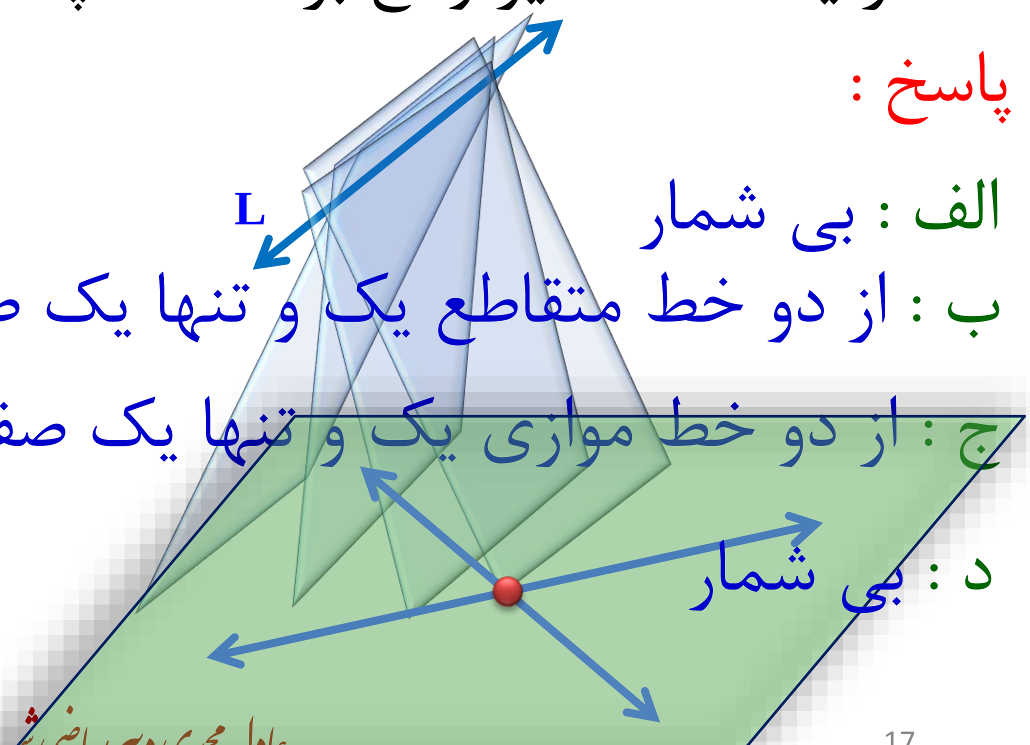
الف : از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد ؟

ب : از دو خط متقاطع چند صفحه می گذرد ؟

ج : از دو خط موازی چند صفحه می گذرد ؟

د : از یک نقطه غیر واقع بر صفحه چند خط موازی آن صفحه می گذرد ؟

پاسخ :

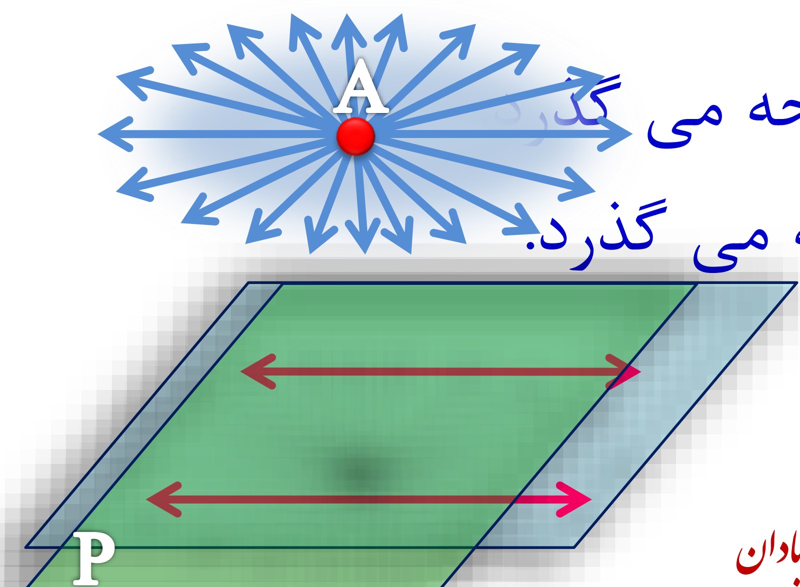


الف : بی شمار

ب : از دو خط متقاطع یک و تنها یک صفحه می گذرد

ج : از دو خط موازی یک و تنها یک صفحه می گذرد.

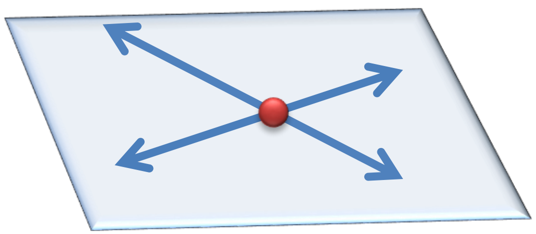
د : بی شمار



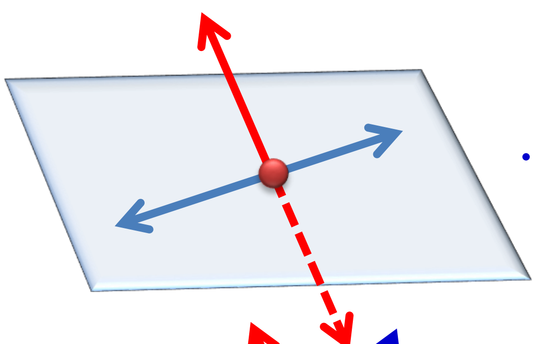
مثال ۲ : دو خط در نقطه A متقاطع اند . اگر نقطه A در صفحه P واقع باشد . وضعیت صفحه P و آن دو خط را مشخص کنید.

پاسخ :

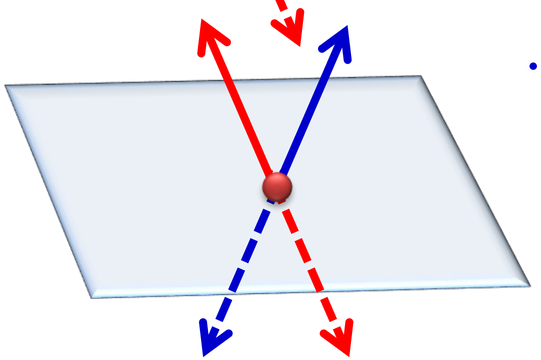
یکی از سه حالت زیر رخ می دهد :



۱- هر دو خط به تمامی در صفحه P قرار دارند.



۲- فقط یکی از دو خط به تمامی در صفحه قرار دارد.



۳- هر دو خط صفحه را در نقطه A قطع می کنند.

مثال ۳ : دو خط d' و d در فضا موازی اند.

الف : اگر صفحه ای با یکی از این دو خط موازی باشد ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

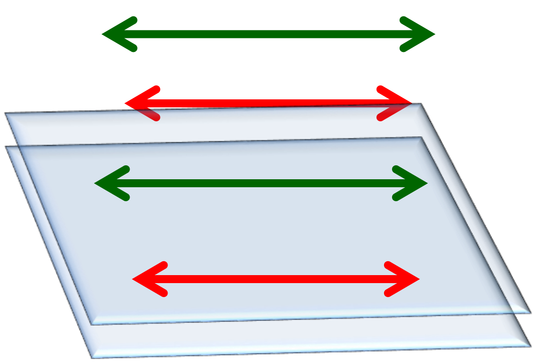
ب : اگر صفحه ای شامل یکی از این دو خط باشد ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

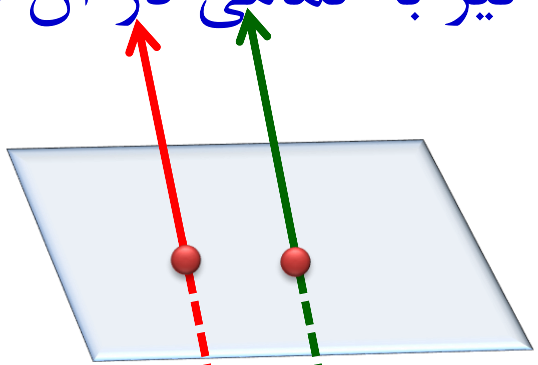
ج : اگر صفحه ای یکی از این دو خط را قطع کند ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

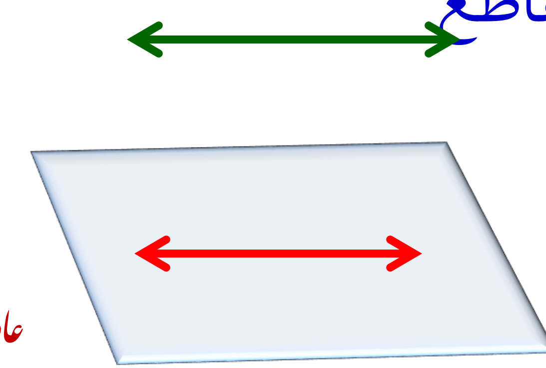
پاسخ : الف : یا موازی است یا خط دوم به تمامی در آن قرار دارد.

ب : یا موازی است یا خط دوم نیز به تمامی در آن قرار دارد.

ج : متقاطع







مثال ۳ : دو خط d' و d در فضا متنافرند.

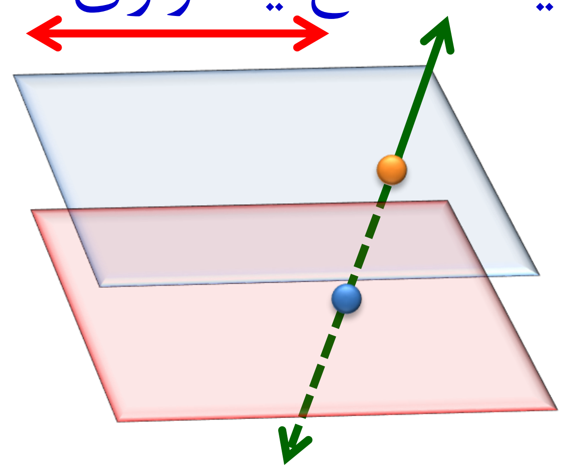
الف : اگر صفحه ای با یکی از این دو خط موازی باشد ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

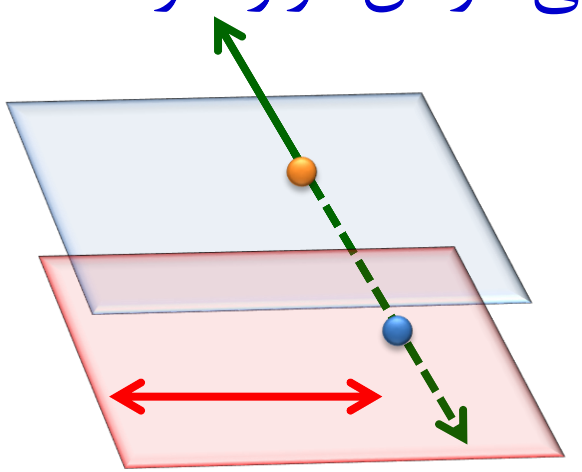
ب : اگر صفحه ای شامل یکی از این دو خط باشد ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

ج : اگر صفحه ای یکی از این دو خط را قطع کند ، نسبت به دیگری چه وضعی دارد ؟

پاسخ : الف : متقاطع ب : متقاطع

ج : یا متقاطع یا موازی است یا خط دوم به تمامی در آن قرار دارد.

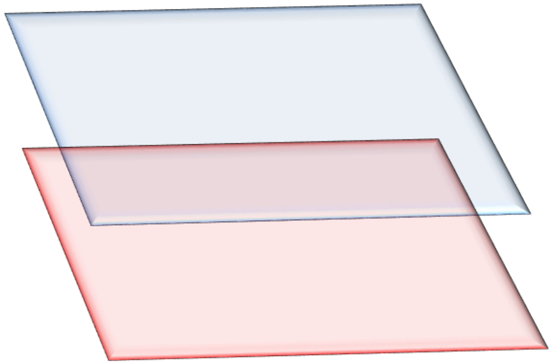


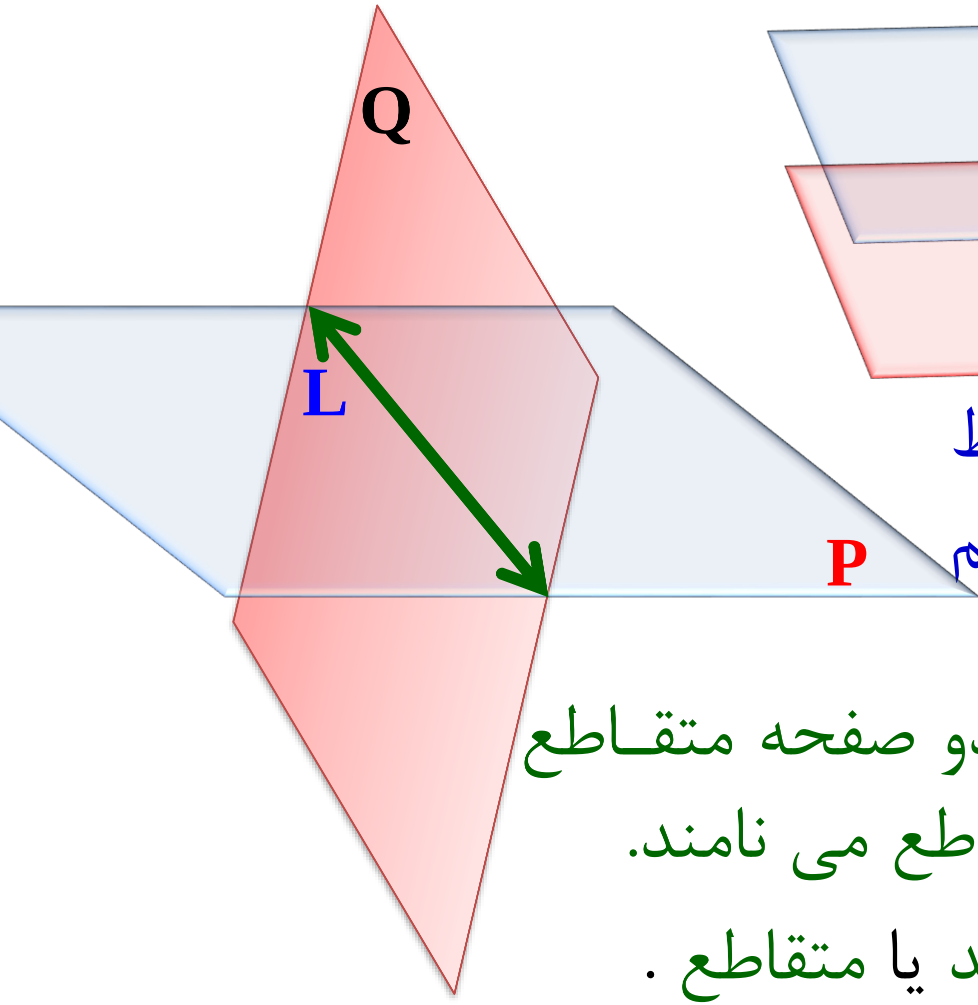


عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

۱- اگر دو صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند ، نسبت به هم موازی اند.





۲- اگر دو صفحه فقط در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند .

تذکر : خط راستی که محل تقاطع دو صفحه متقاطع است را فصل مشترک دو صفحه متقاطع می نامند.

نتیجه : دو صفحه در فضا یا موازی اند یا متقاطع .

وقتی دو صفحه بر هم منطبق می شوند ، آنها را یک صفحه در نظر می گیریم.

کار در کلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

HG و DC چطور؟ موازی

EF و GC چطور؟ متنافر

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ چهار

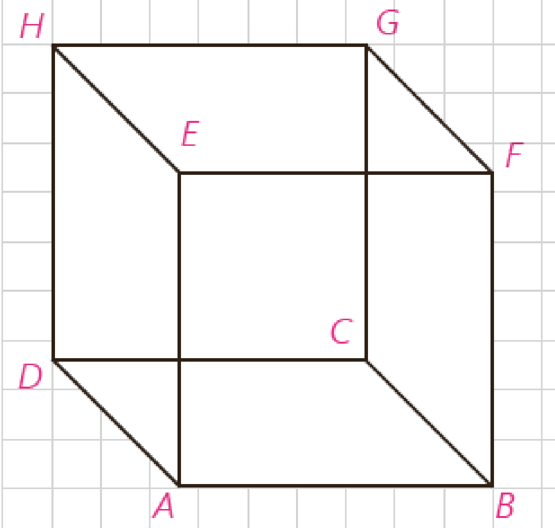
با چند خط موازی است؟ سه

با چند خط متنافر است؟ چهار

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ صفحه FBC

با کدام متقاطع است؟ صفحه های ABC, EFG

بر کدام واقع است؟ صفحه های ADH, CDH

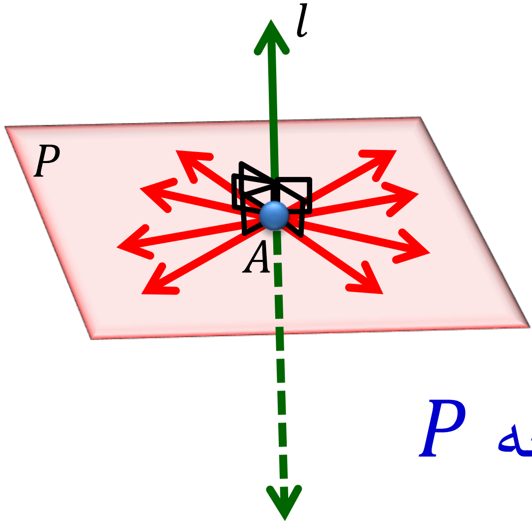


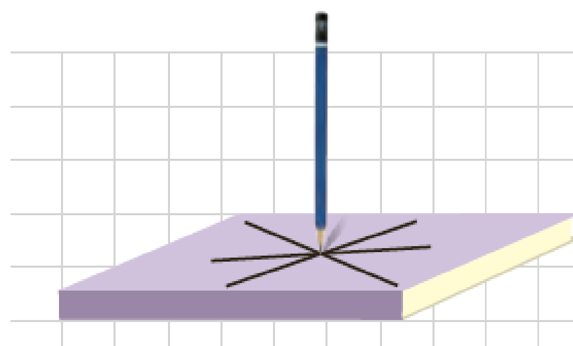
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تعامُد

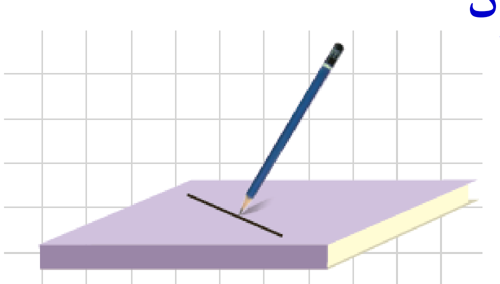
یادآوری : دو خط را عمود برهم می نامیم هرگاه زاویه بین آنها قائمه باشد.

تعریف خط عمود برصفحه : خط l بر صفحه P عمود است اگر صفحه P را در نقطه ای مانند A قطع کند و بر تمام خطهای صفحه P که از A می گذرند عمود باشد.



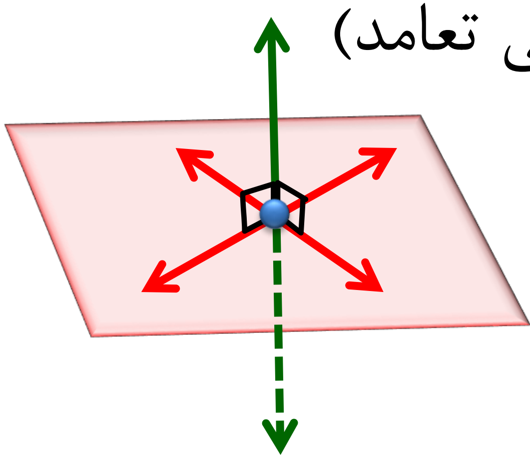


توجه : اگر خط l فقط بر یکی از خطهای صفحه P عمود باشد نمی توان نتیجه گرفت که l بر P عمود است .

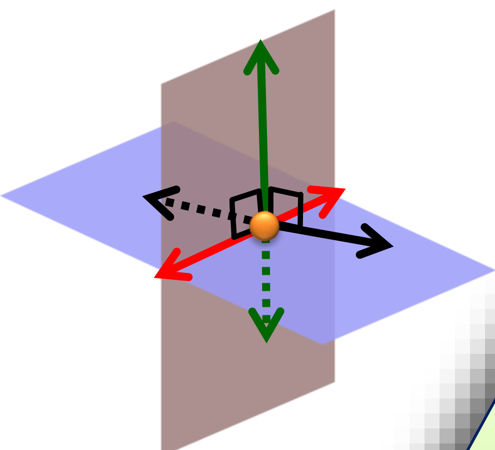


تعامُد

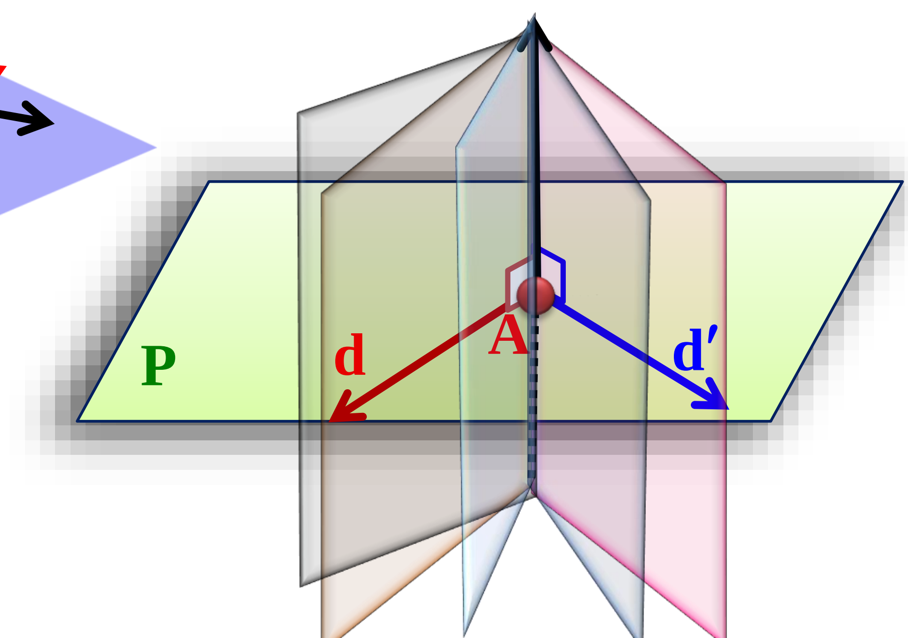
توجه : می توان ثابت کرد یک خط بر یک صفحه عمود است اگر و تنهـا اگـر بر دو خط متقاطع از آن صفحه عمود باشد. (قضیه اساسی تعامد)



تعریف دو صفحه عمود برهم : دو صفحه را عمود برهم می نامیم هر گـاه هـر کـدام از آنهـا شـامل خطی باشد که بر صفحه دیگر عمود باشد.



نتیجه : اگر خـط L بـر صفحه P عمود باشد، هر صـــفحه‌ای کـــه از L می‌گـذرد، بـر صـفحه P عمود است.



عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

مثال ۱ : می دانیم در یک صفحه دو خط عمود بر یک خط موازی اند.

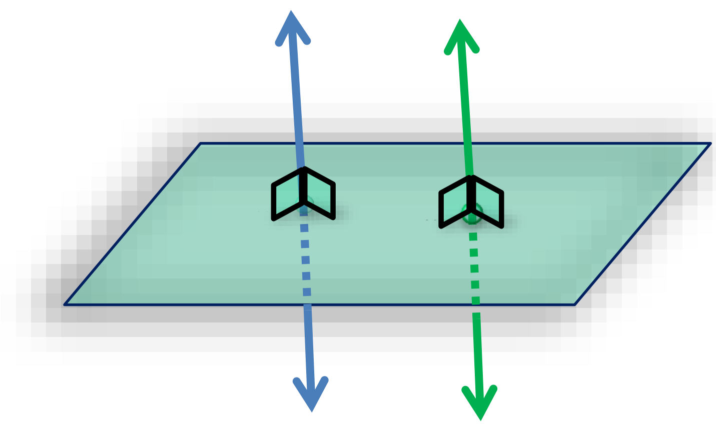
الف : آیا دو خط عمود بر یک صفحه حتماً موازی اند ؟

ب : آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه حتماً موازی اند؟

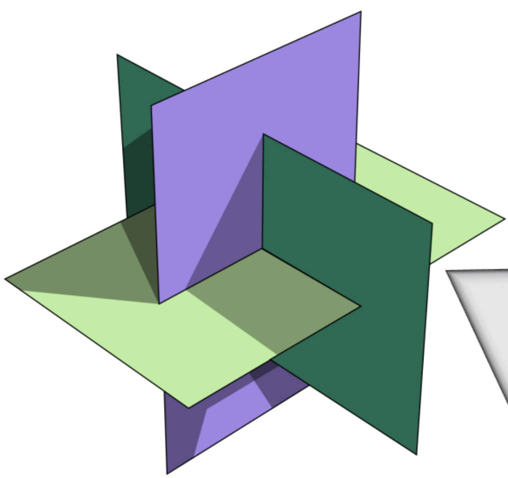
ج : آیا دو صفحه عمود بر یک خط حتماً موازی اند؟

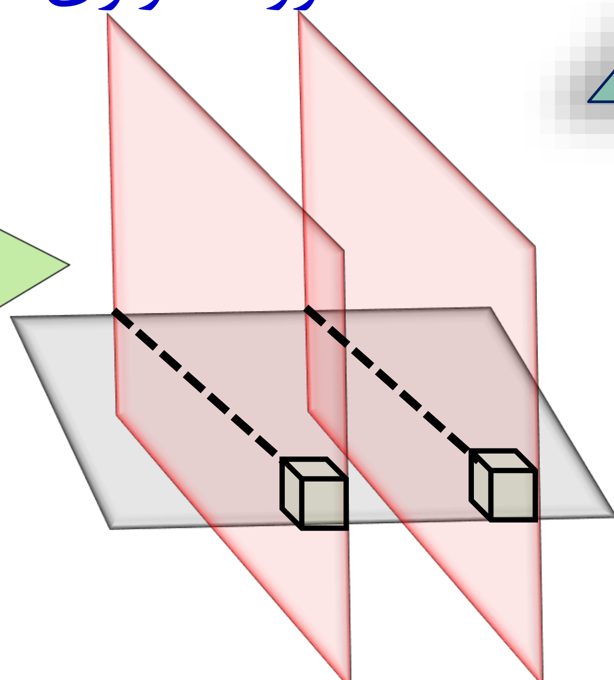
پاسخ :

الف : بله

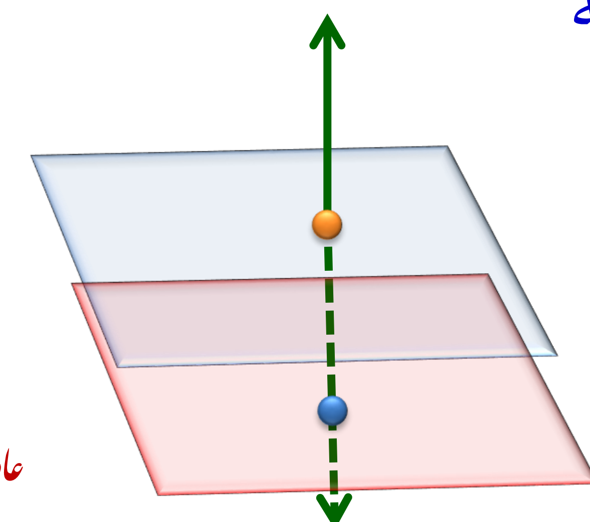


ب : خیر دو صفحه عمود بر یک صفحه لزوماً موازی نیستند

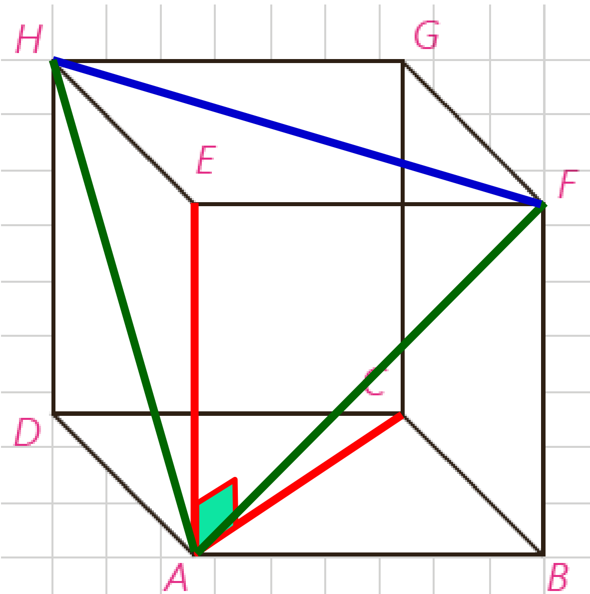




ج : بله



مثال ۲ : با توجه به مکعب مقابل اندازه هر یک از زاویه های $C\hat{A}E, F\hat{A}H$ چند درجه است ؟



پاسخ :

در مکعب هر دو وجه مجاور بر هم عمودند . لذا خط AE بر صفحه ABC عمود است. پس زاویه CAE برابر ۹۰ درجه است.

در مکعب شش وجه وجود دارد که همگی مربع و همنشت هستند. لذا قطرهای این مربع ها مساوی اند . پس :

$$AF = FH = HA \to F\hat{A}H = 60°$$

تمرین

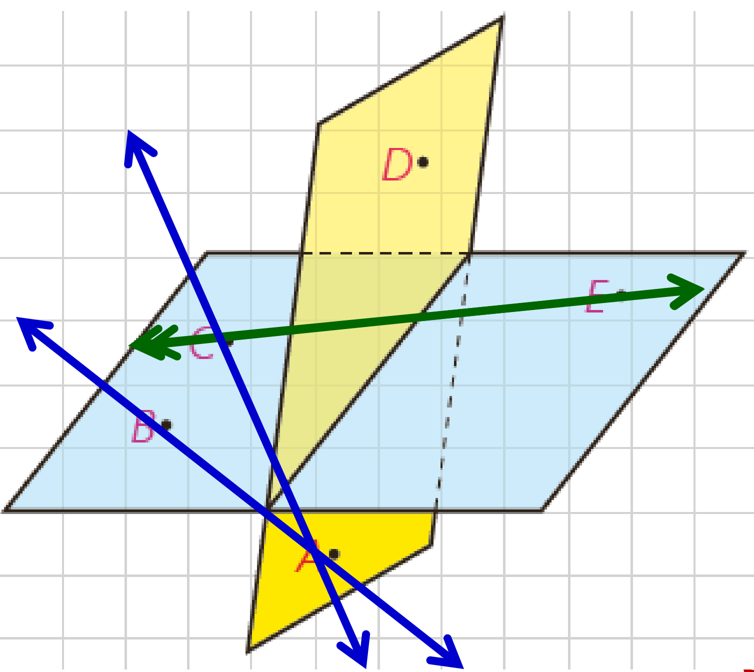
۱ــ با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.

ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



پاسخ :

الف : دو صفحه   ب : E , C , B

ج : D , E , C , B

د : دو خط CE , AB متنافرند

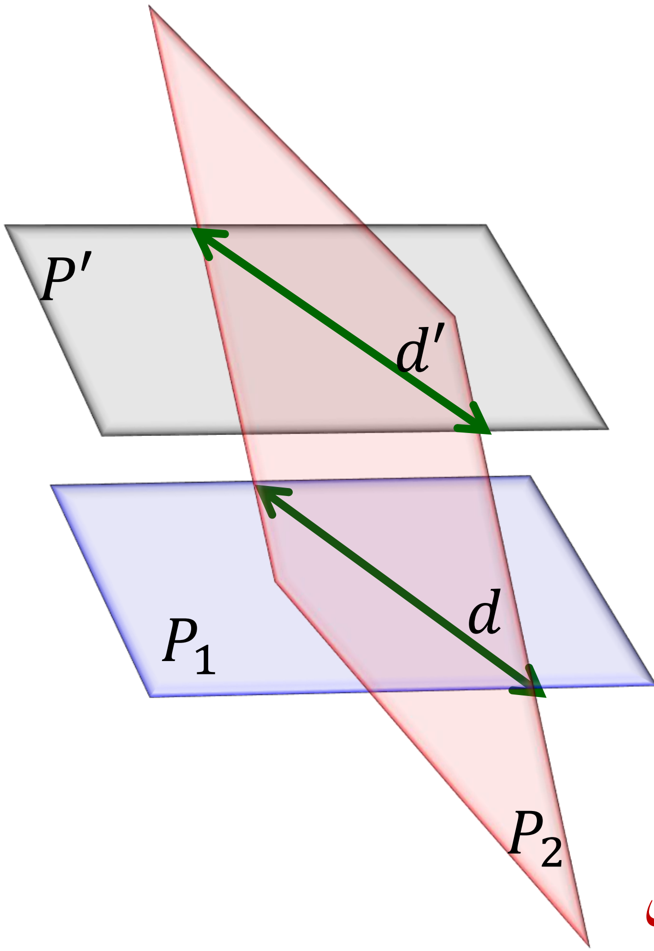
دو خط CE , AC متقاطع اند

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۲ــ دو صفحهٔ P_1 و P_2 را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.

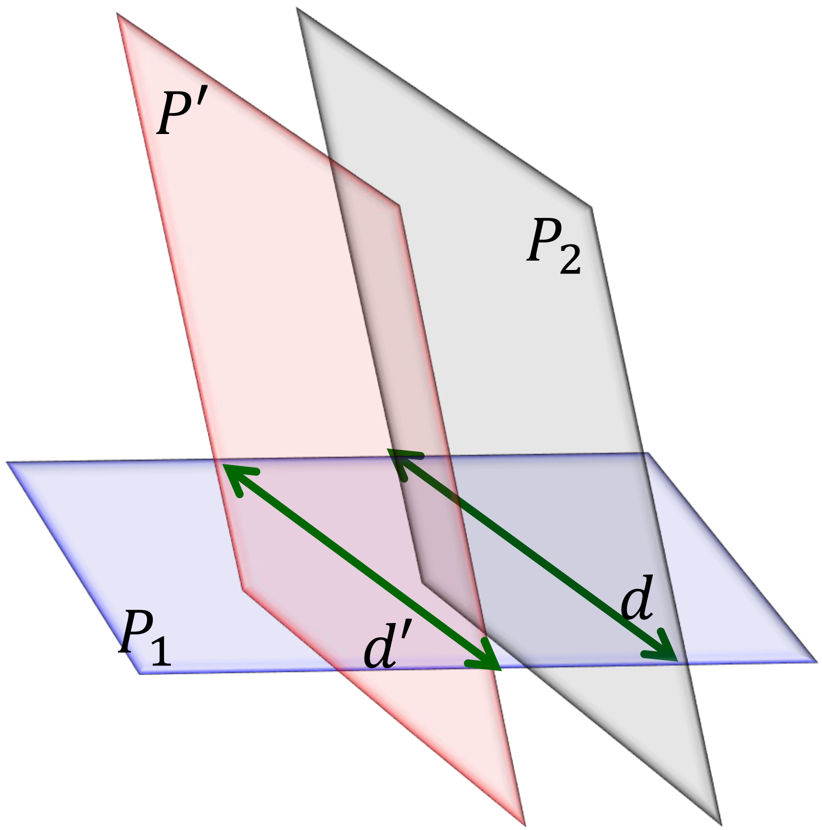


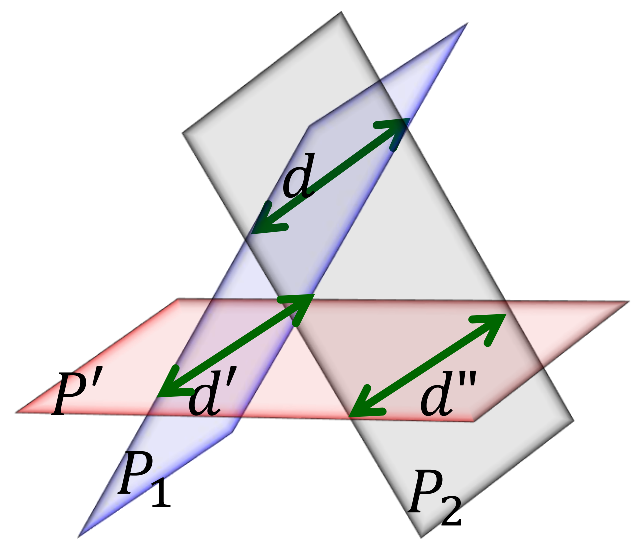
پاسخ :

الف : دو صفحه P',P_2 متقاطع اند .

ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.

پاسخ : ب : دو صفحه P',P_2 می توانند موازی یا متقاطع باشند .

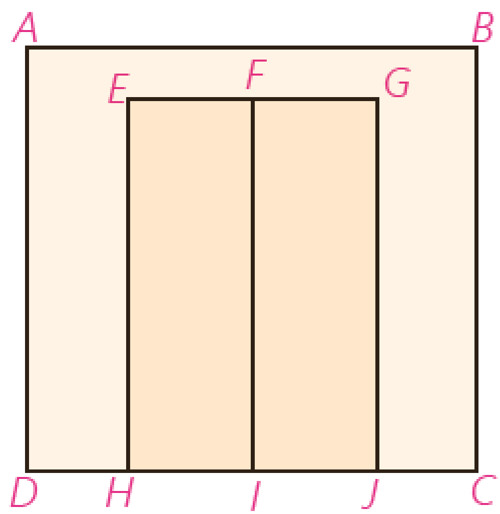




تمرین

۳ــ شکل زیر یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به‌دو نسبت به هم بررسی کنید.



ب) خطوط FI و BC

ج) خطوط FI و AB

د) خطوط FG و EF

هـ) خطوط FG و HI

پاسخ :

الف : این صفحه ها همگی برهم منطبق اند و یک صفحه در نظر گرفته می شوند

ب : موازی ج : متقاطع د : منطبق (یکی هستند.) هـ : موازی

تمرین

۴ــ تجسم کنید دو لنگهٔ در هرکدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

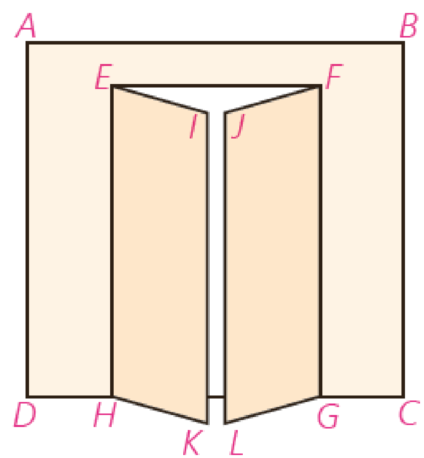
ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

هـ) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط FJ و BC



پاسخ :

الف : هر سه صفحه دو به دو متقاطع اند

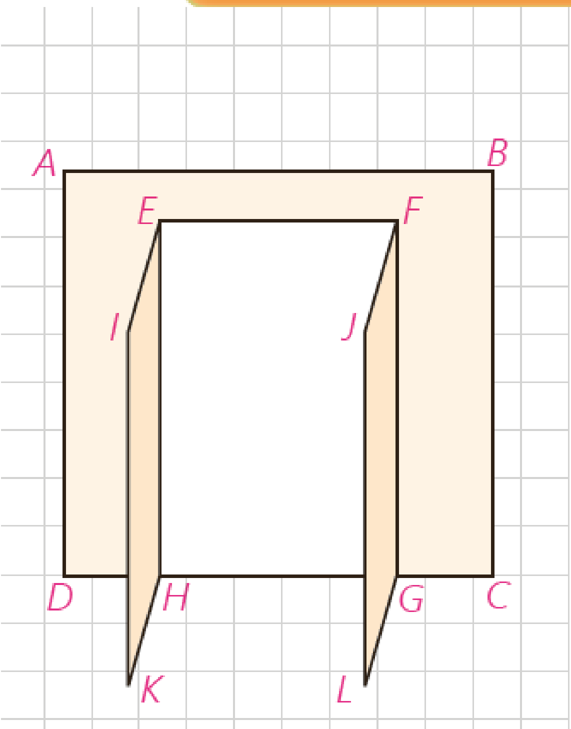
ب : متقاطع

ج : موازی

د : EH بر صفحات ABCD,EHKI قرار دارد ولی با صفحه JFGL موازی است .

هـ : متقاطع   و : متنافر   ز : متنافر

تمرین



۵ــ تصور کنید دو لنگهٔ در هرکدام °۹۰ باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خطوط EI و FJ

هـ) خطوط FJ و HK

پاسخ :

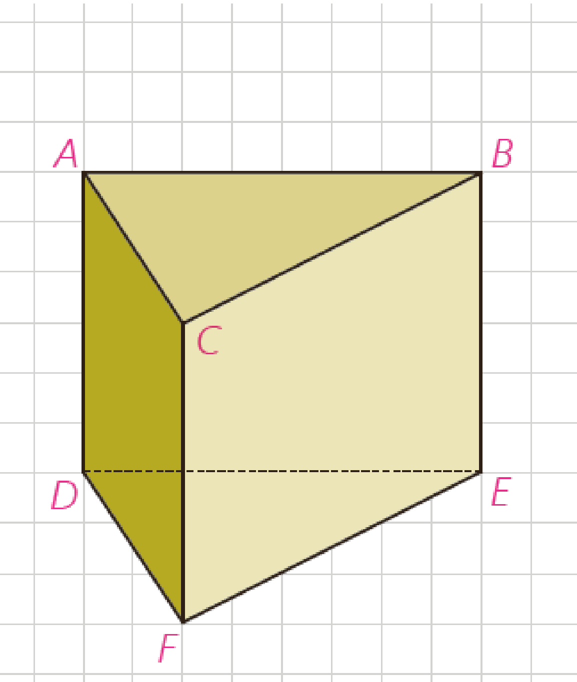
الف : موازی　　　ب : موازی

ج : موازی　　　د : موازی

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۶ـ منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :



الف) سه جفت خط متمایز دو به‌دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به‌دو متنافر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دو به‌دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط همرس نام ببرید.

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید.

و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.

ز) سه صفحهٔ دو به دو متقاطع نام ببرید.

پاسخ :

الف : AD,CF و AB,DE و BC,EF

ب : AD,BC و AB,DF و AC,EF

ج : AB,AD و BC,BE و AC,CF

د : AB,AC,AD

هـ : صفحه ABC و خط EF–صفحه DEF و خط AB–صفحه BCFE و خط AD

و : ABC و EFD

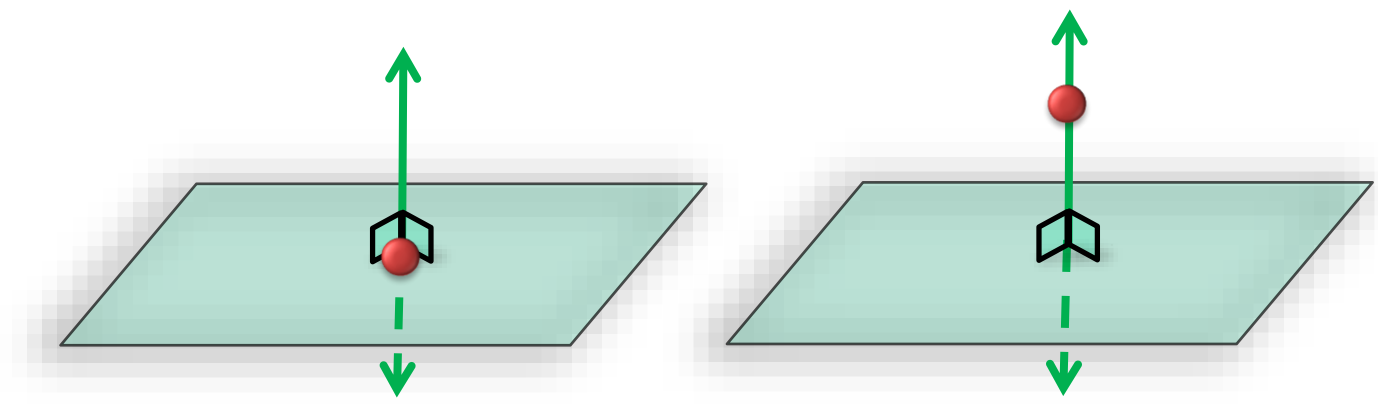
ز : ABED و BCFE و ACFD

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۷ــ از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

پاسخ :

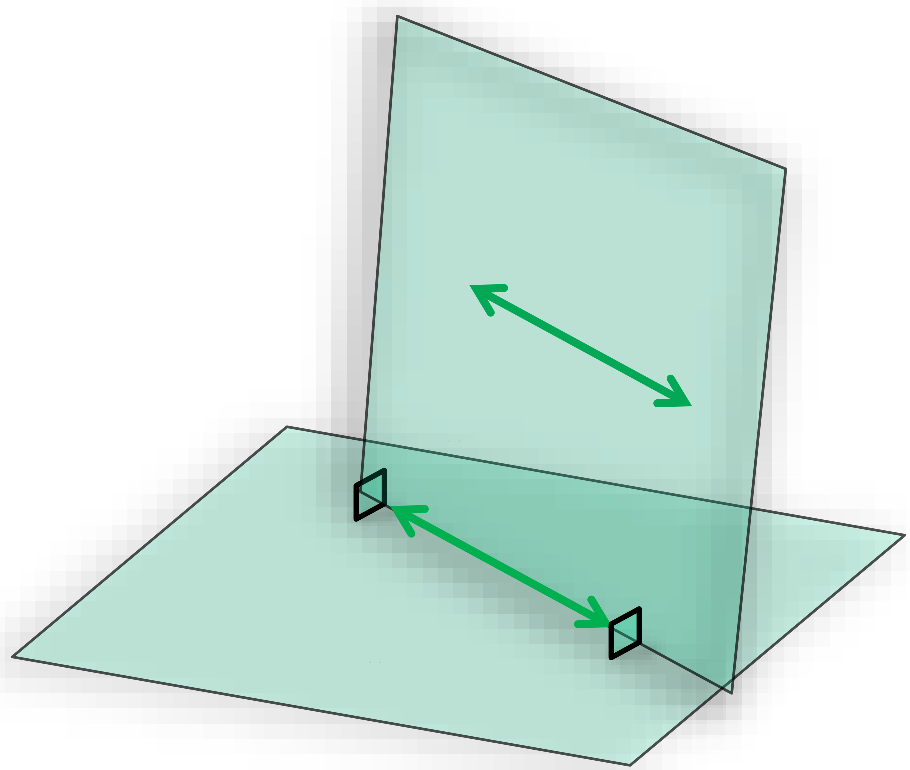
الف : از هر نقطه (واقع یا غیر واقع) بر یک صفحه فقط یک خط می تـوان بر آن صفحه عمود کرد.



۸ــ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

پاسخ :

الف : از هر خط (واقع یا غیر واقع) بر یک صفحه فقط یک صفحه می توان بر آن صفحه عمود کرد.



۸ـ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

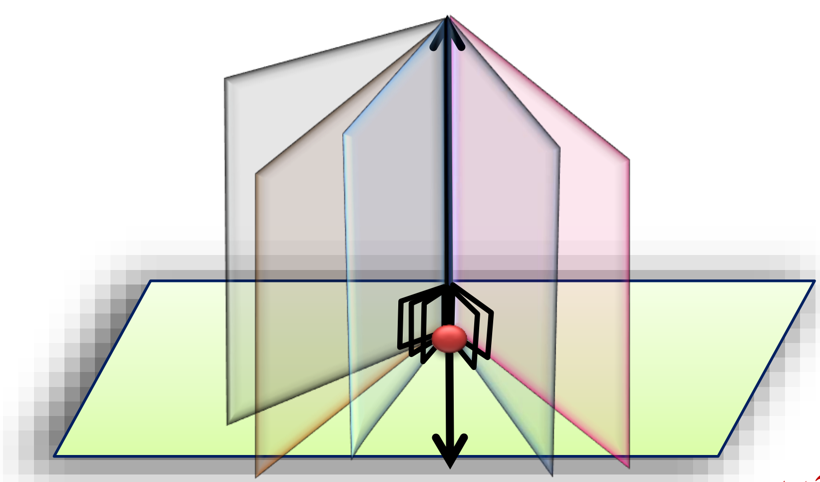
الف) خط بر صفحه عمود باشد.

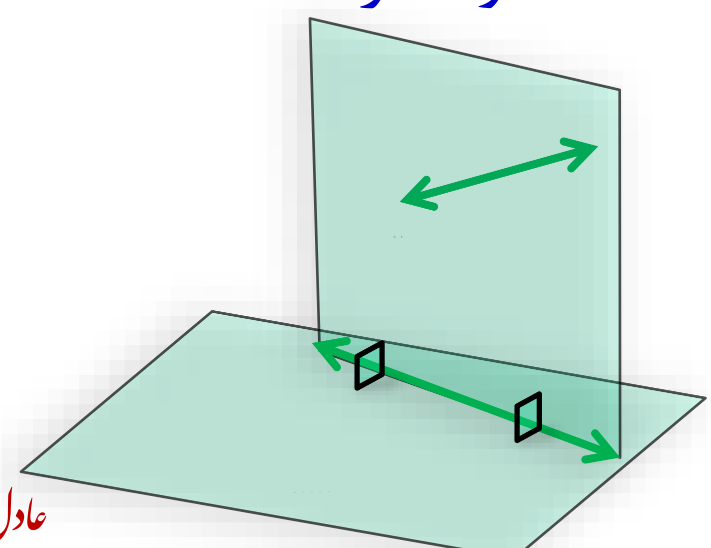
ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

پاسخ :

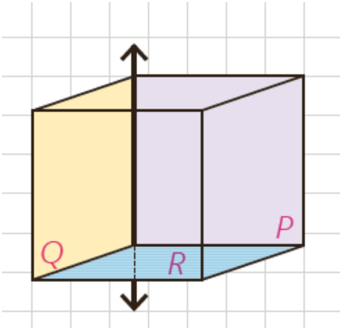
الف : از هر خط عمود بر یک صفحه بی شمار صفحه می توان بر آن صفحه عمود کرد.

ب : از هر خط غیر عمود بر یک صفحه فقط یک صفحه می توان بر آن صفحه عمود کرد.





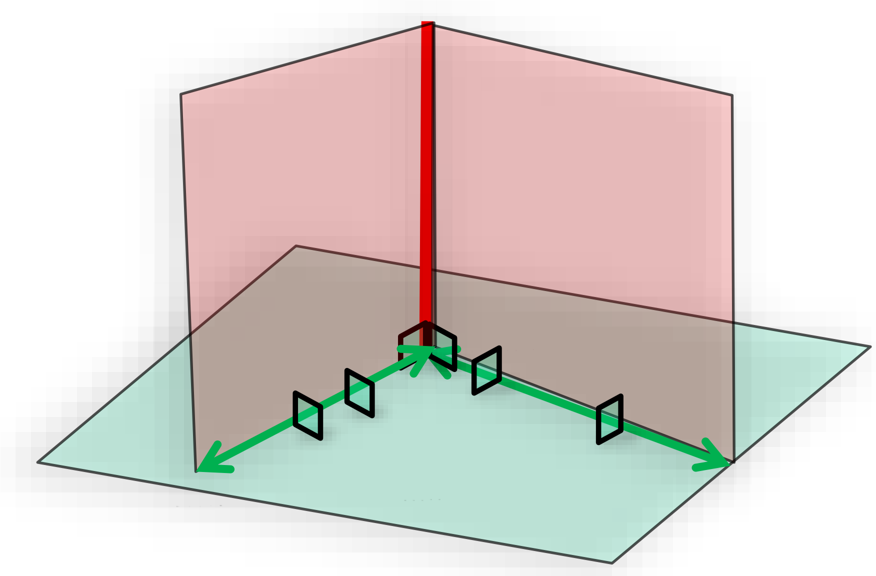
تمرین



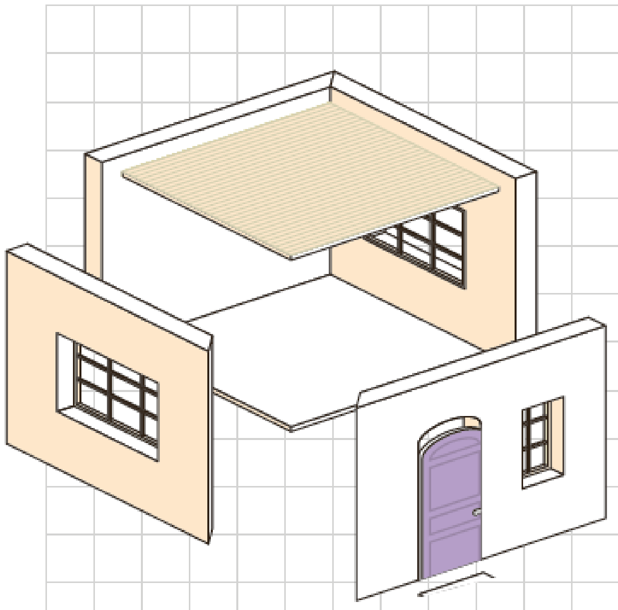
۱۰ــ دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ R چه وضعیتی دارد؟

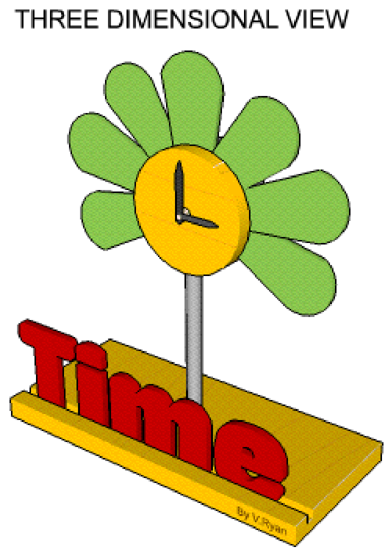
پاسخ :

فصل مشترک این دو صفحه نیز بر صفحه R عمود است.

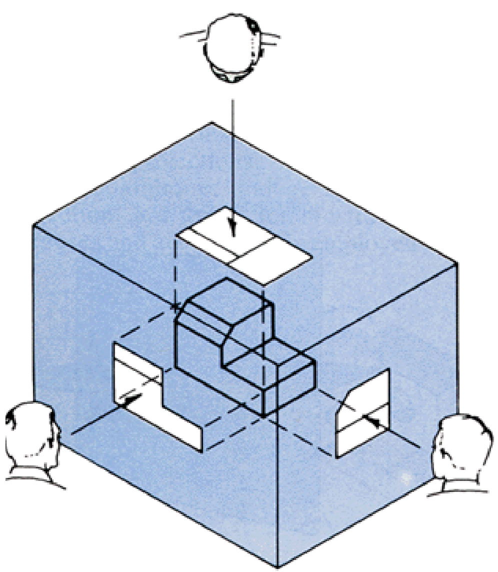


درس دوم



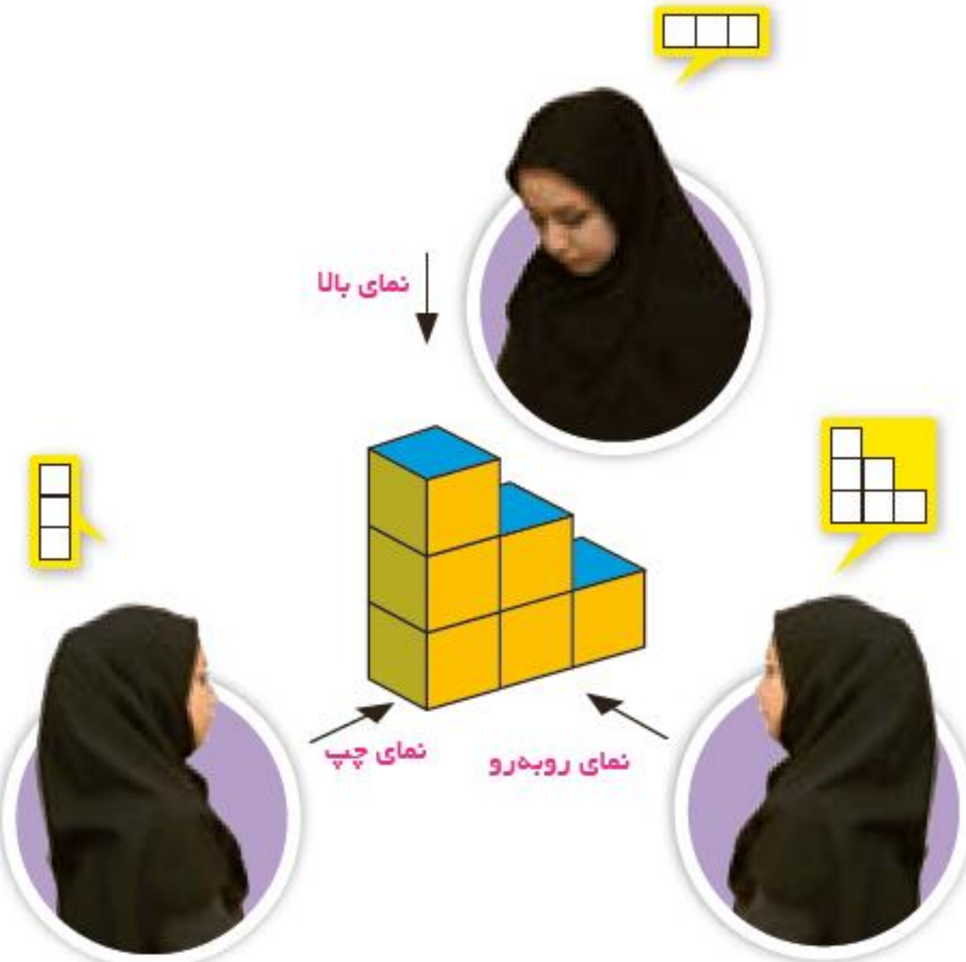


تفکرتجسمی



در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع مورد نظر فکر کنیم.

ـ تصویر روبه‌رو چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟

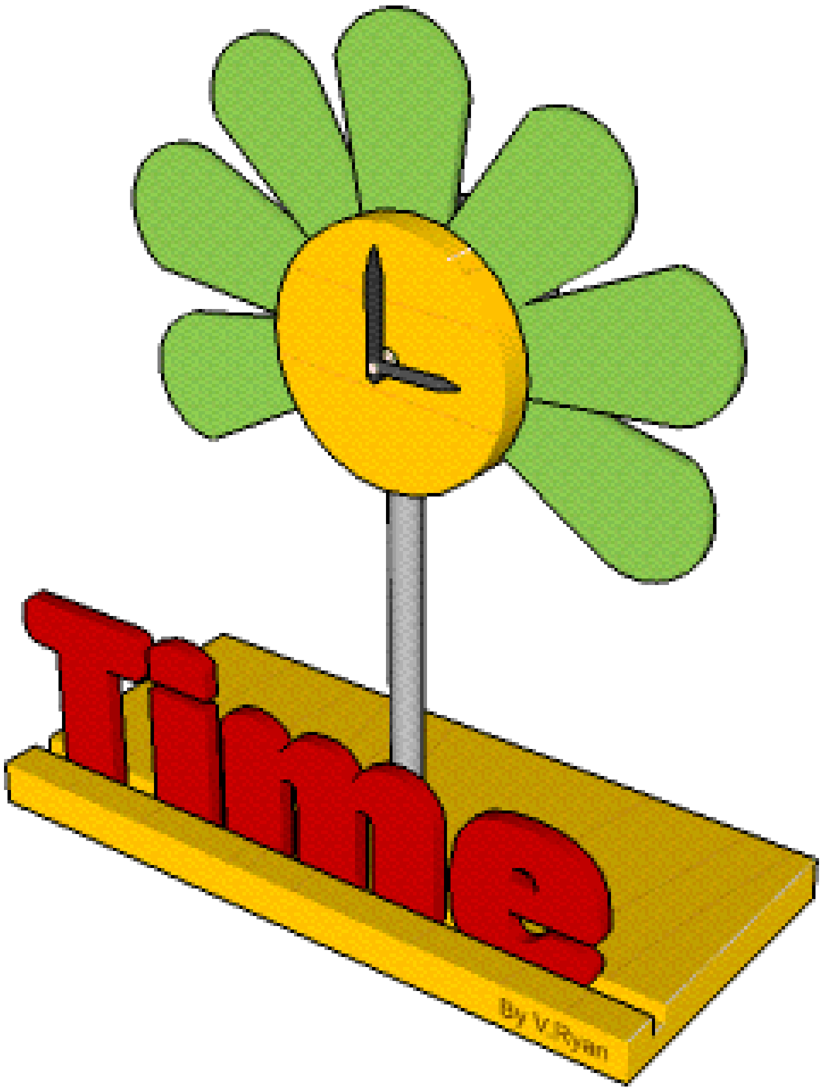


آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟

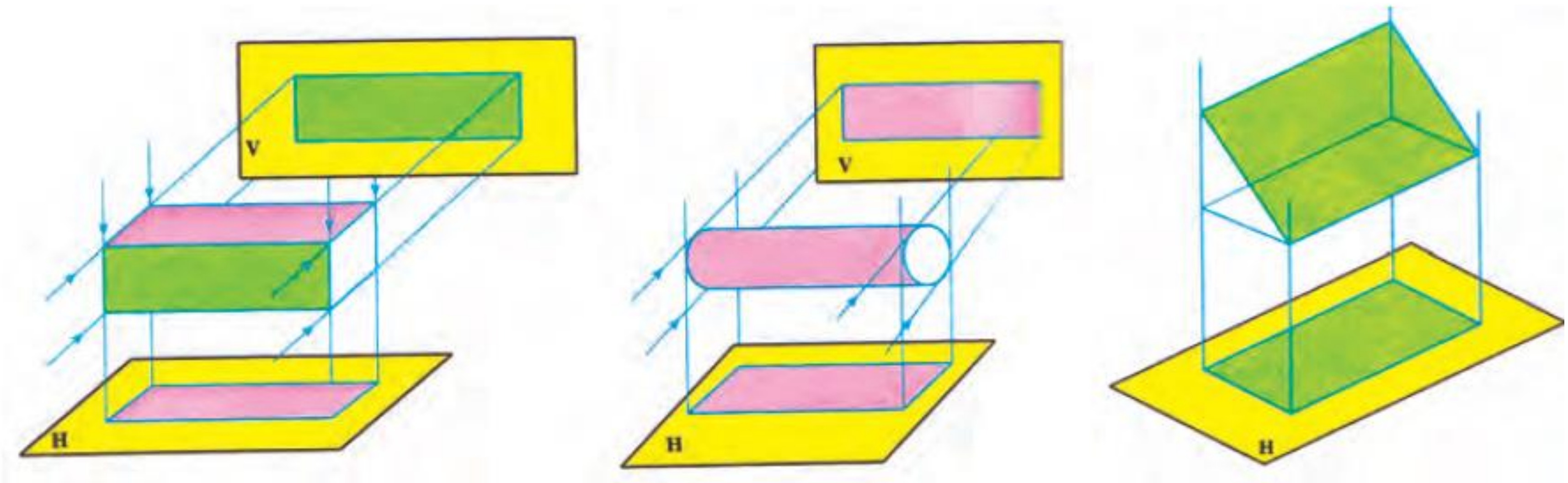
آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویهٔ دید، تمام این تصاویر را دید؟

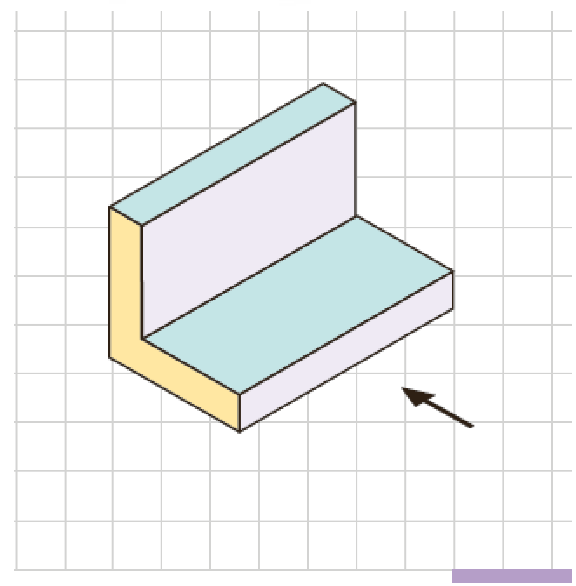
آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟

THREE DIMENSIONAL VIEW

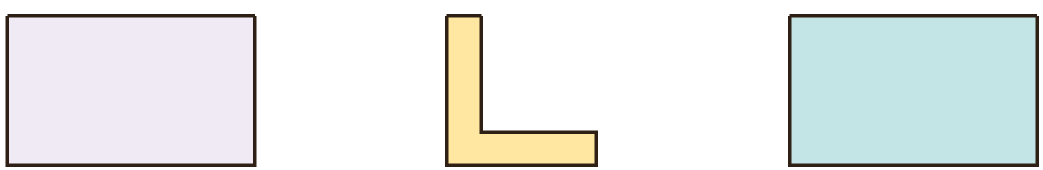


تصویر دو بعدی اجسام





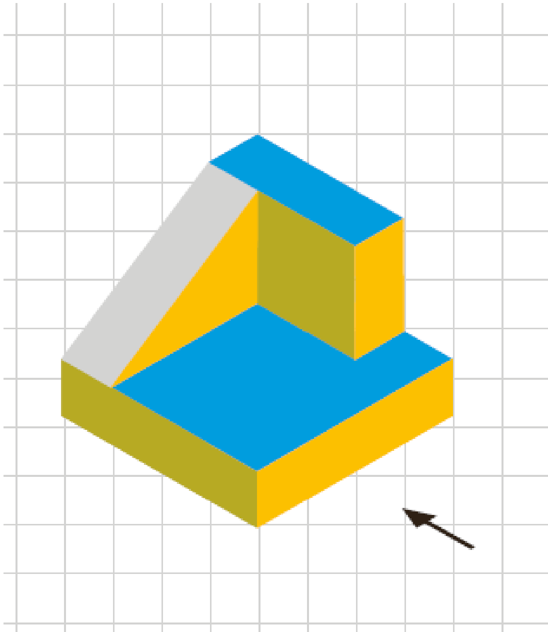
تصویر زیر از نمای بالا، چپ و روبه‌رو رسم شده است.

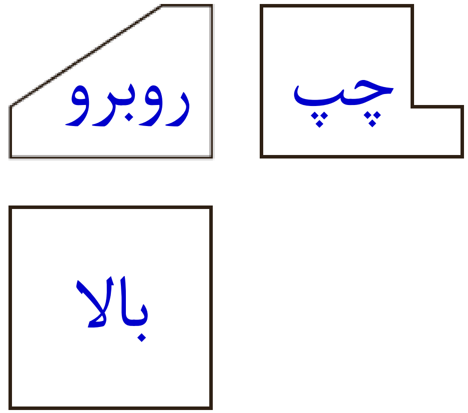


در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع‌های متفاوت و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست، فقط در شکل‌هایی که به‌صورت شطرنجی، اندازه‌های دقیق داده شده، انتظار می‌رود در رسم نماهای مختلف، خطوط شطرنجی ترسیم شود.

کاردرکلاس

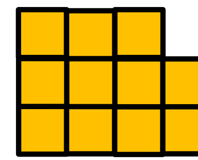
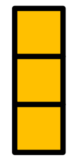
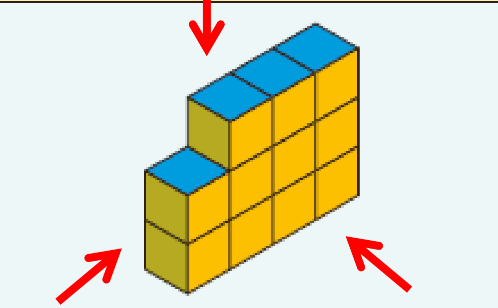
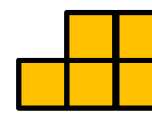
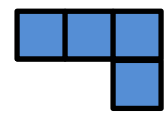
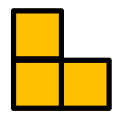
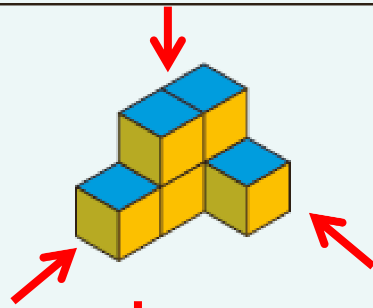
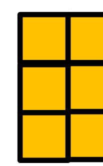
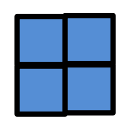
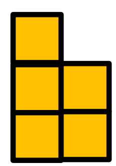
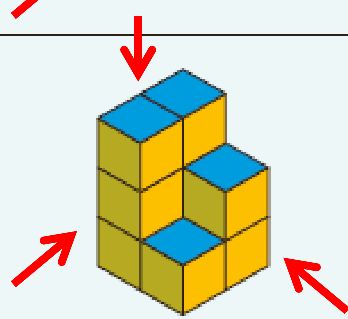
۱ـ شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟





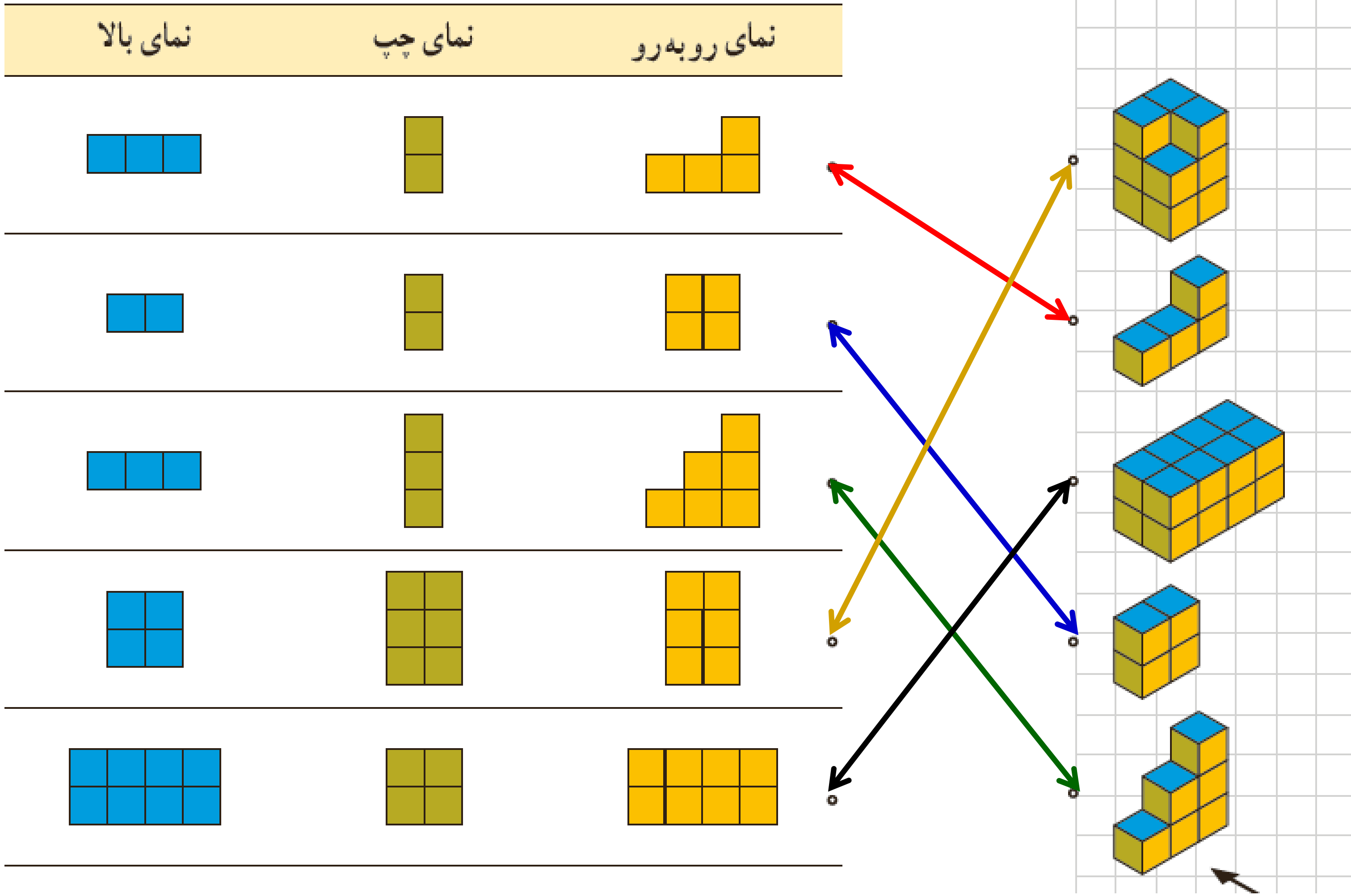
کاردرکلاس

۲ـ سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

نمای رو به رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

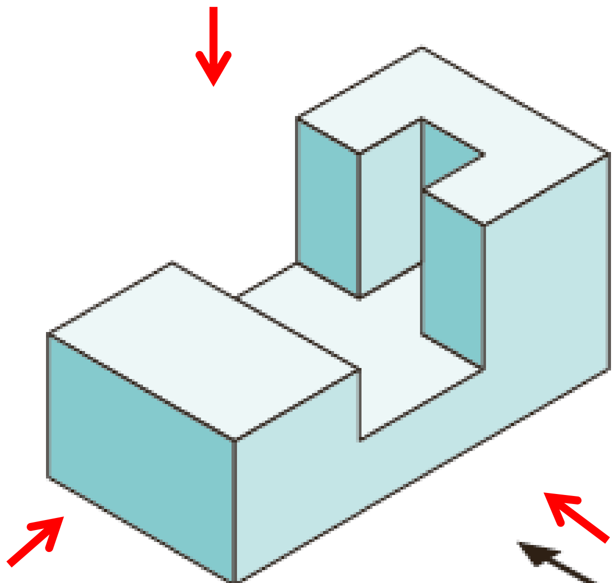
تمرین

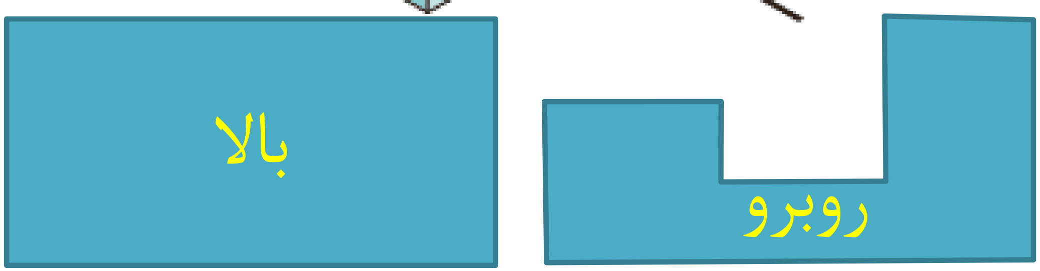
۱ـ نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

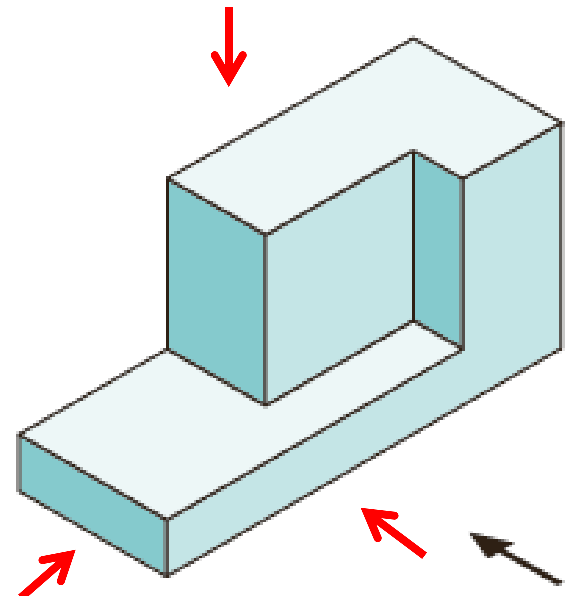


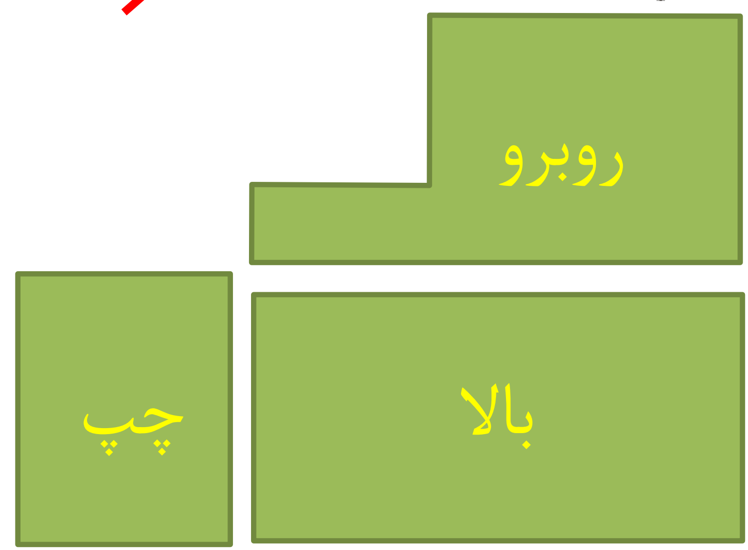
تمرین

۲ـ در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



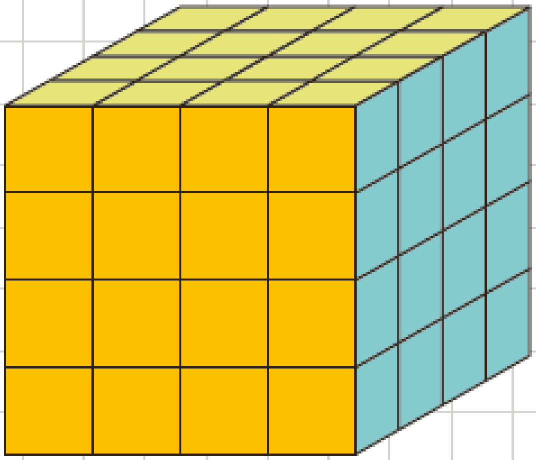






عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

۳ـ تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.



الف : ـ چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟

ب : ـ چند مکعب، رنگ نشده است؟

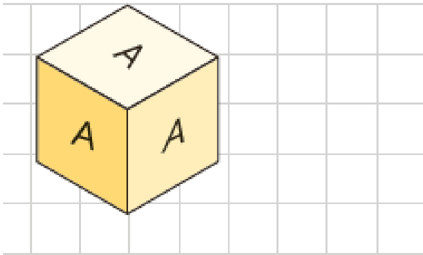
ج : ـ چند مکعب، رنگ شده است؟

د : ـ چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟

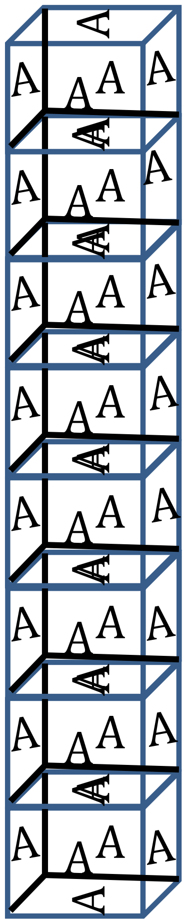
هـ : ـ چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟

پاسخ : الف : ۶۴ ب : ۸ ج : ۵۶

د : ۲۴ هـ : ۸



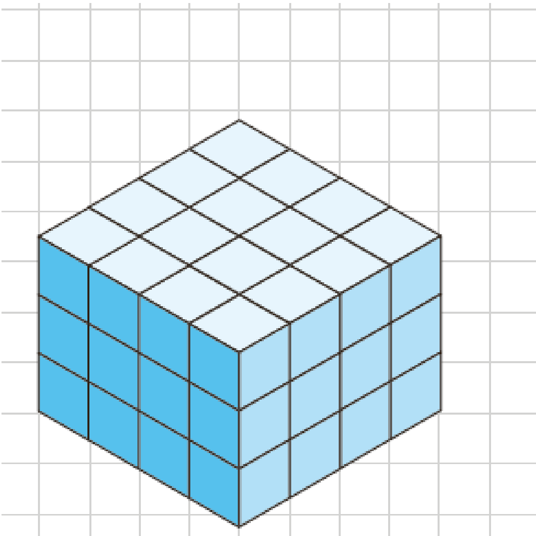
۴ــ روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟



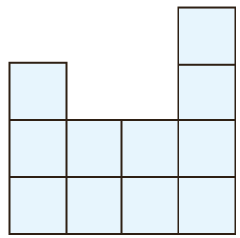
پاسخ : $8 \times 4 + 1 = 33$

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

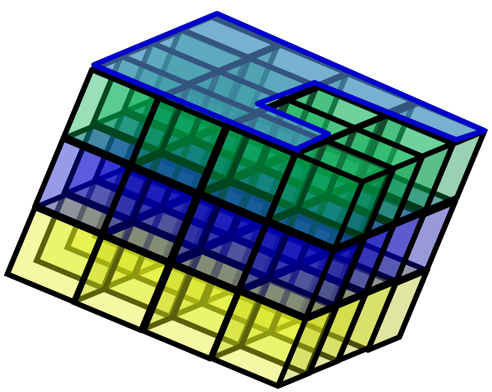
تمرین



۵ــ شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟
حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



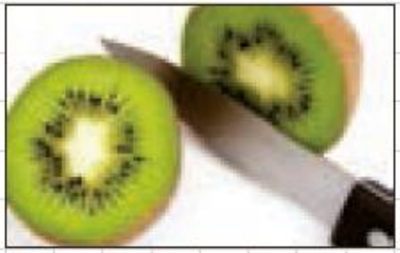
پاسخ :تعداد کل مکعب ها ۴۸

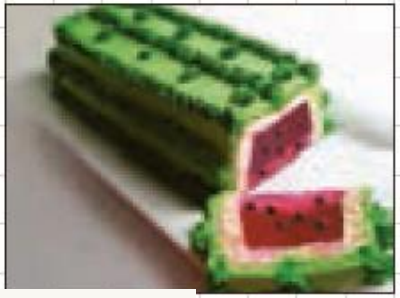


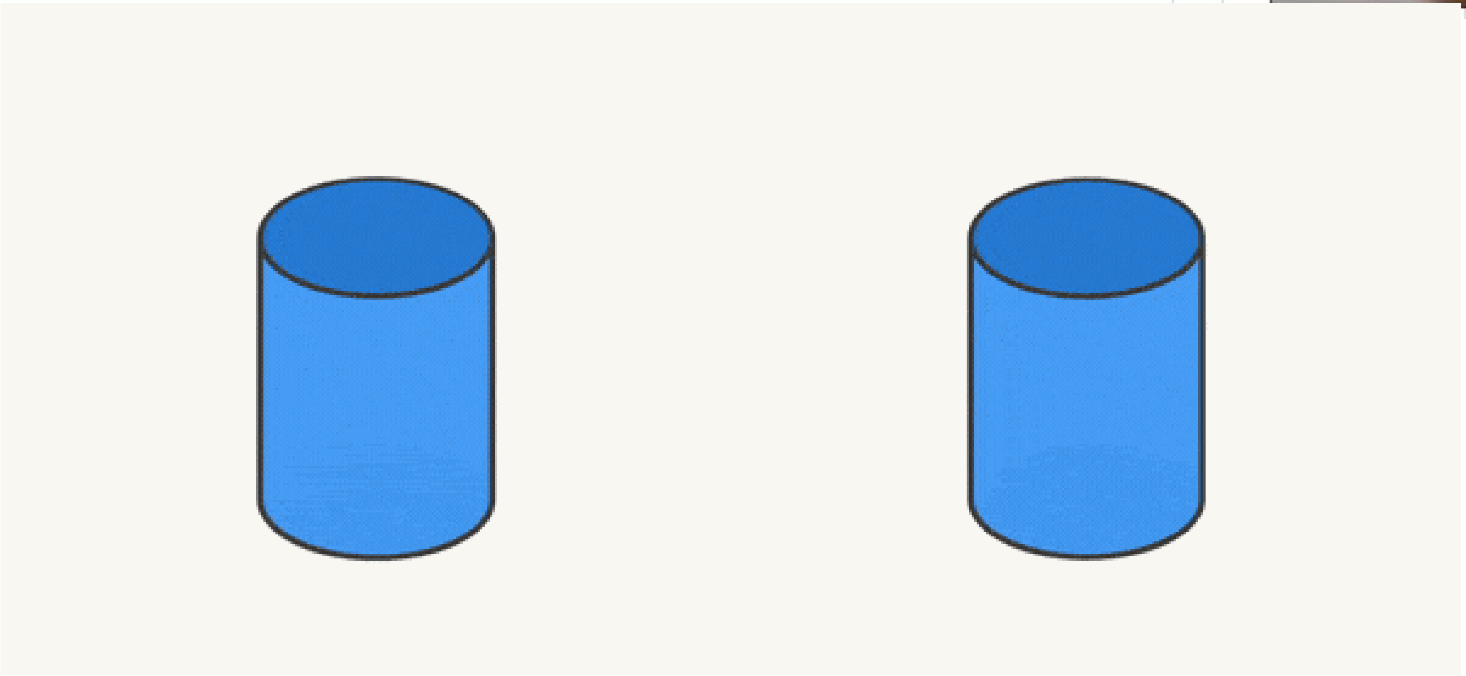
حداقل تعداد مکعب های حذف شده : ۱۵

حداکثر تعداد مکعب های حذف شده : ۳۷

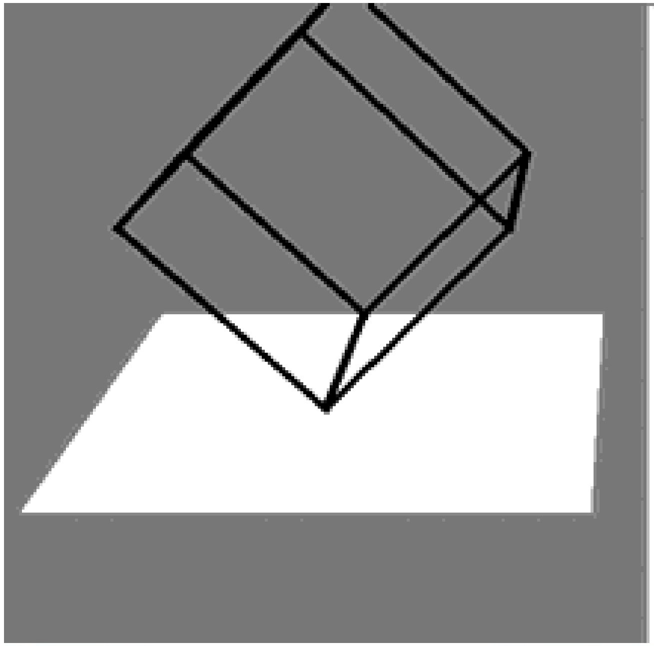
برش

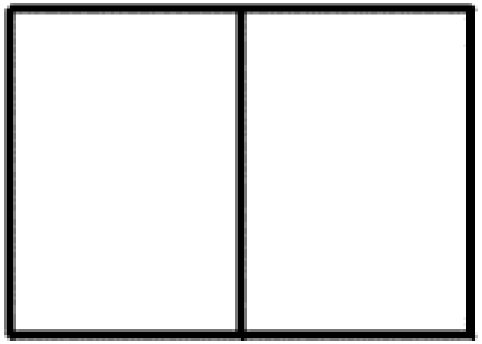






تعریف سطح مقطع : شکلی که از برخـورد یـک صـفحه بـا یـک جسـم هندسی تشکیل می شود را سطح مقطع می نامند.

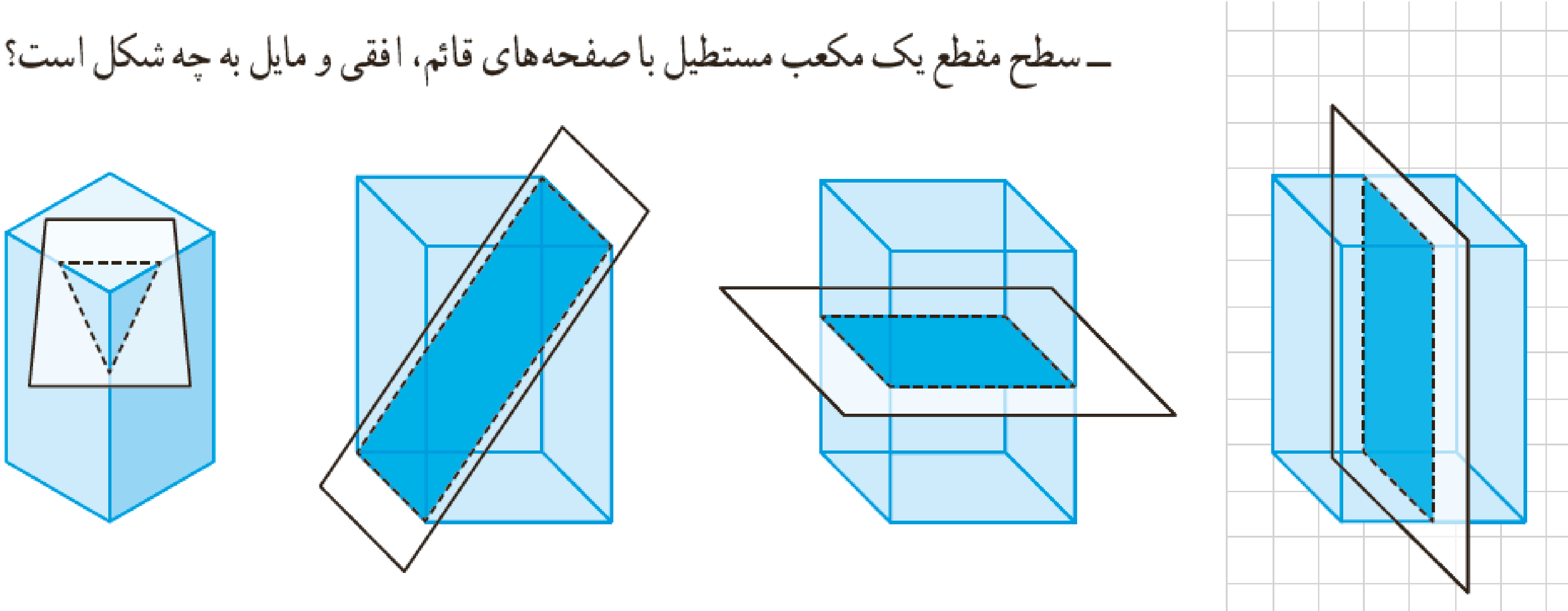




دایره بیضی مستطیل

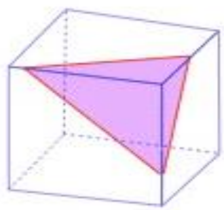
مثال:

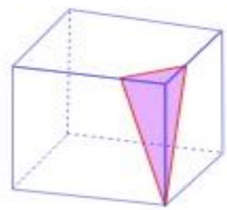
ـ سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟

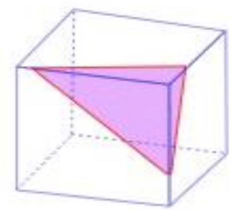


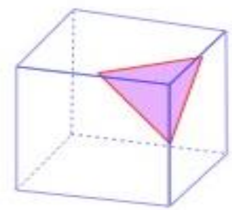
مستطیل   مستطیل   مستطیل   مثلث

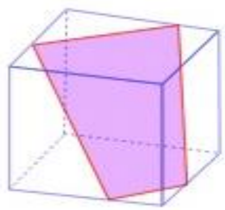
سطح مقطع حاصل از برخورد یک مکعب و یک صفحه چه شکل هایی می تواند باشد ؟

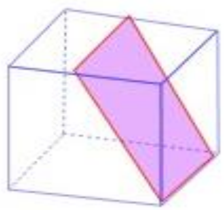

Des triangles quelconques

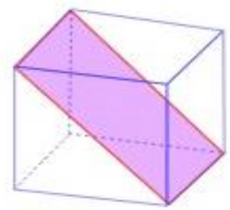

Des triangles isocèles

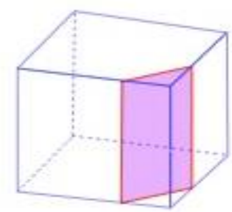

Des triangles rectangles

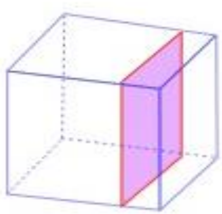

Des triangles équilatéraux

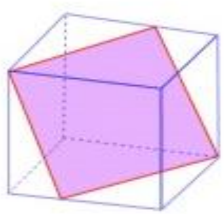

Des trapèzes

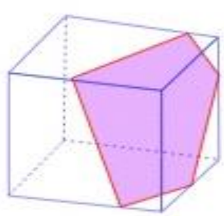

Des parallélogrammes

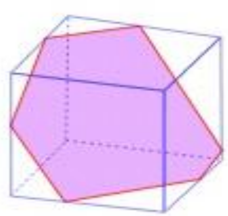

Des rectangles

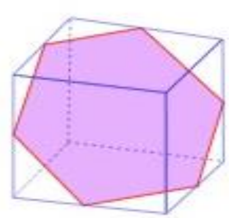

Des rectangles


Des carrés


Des carrés


Des pentagones


Des hexagones spéciaux

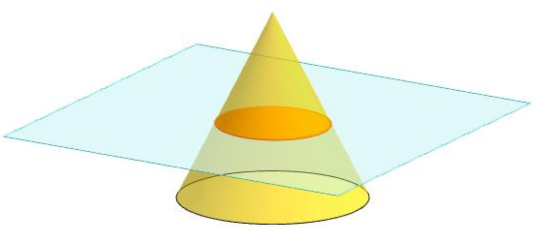

Des hexagones réguliers

یادآوری : شکلی شبیه هرم که قاعده آن دایره باشد را مخروط می نامند.

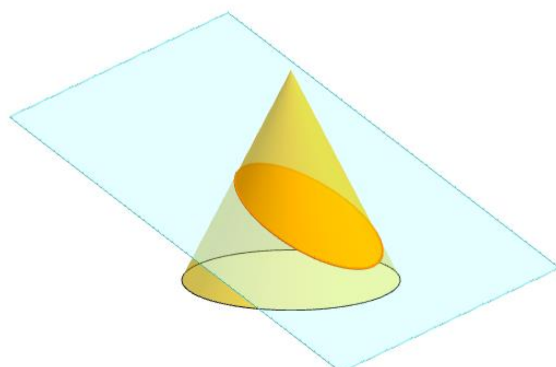
اگر ارتفاع یک مخروط بر مرکز قاعده آن عمود باشد آن را مخـروط قـائم می نامند .

قاعده مخروط دایره است . مخروط یال جانبی ندارد ولی به جای آن مولِد دارد.

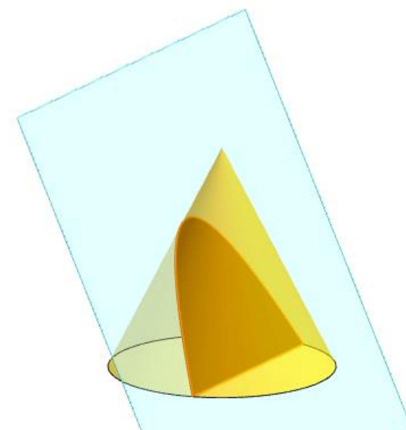
سـوال : سـطح مقطـع یـک مخـروط در برخـورد بـا صفحه های افقی ، قائم و مایل به چه شکل است ؟



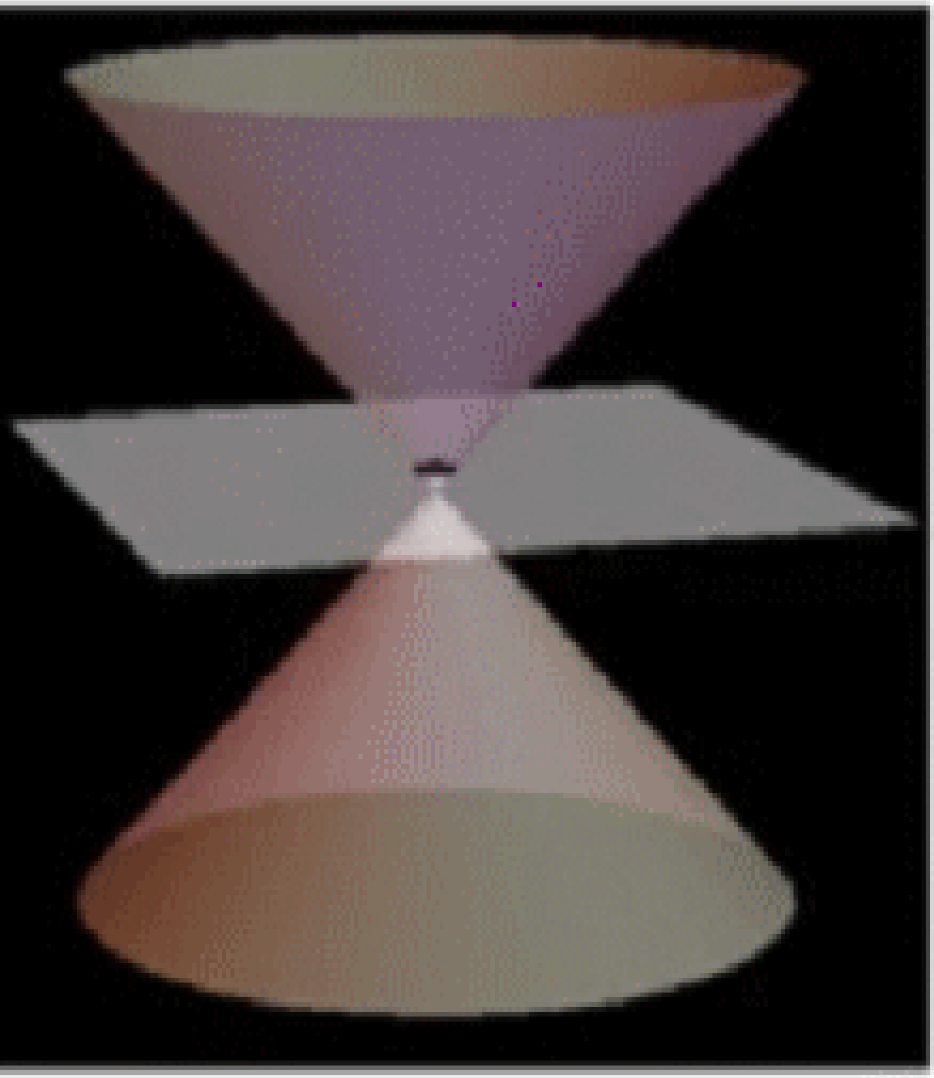
صفحه موازی قاعده



صفحه مایل

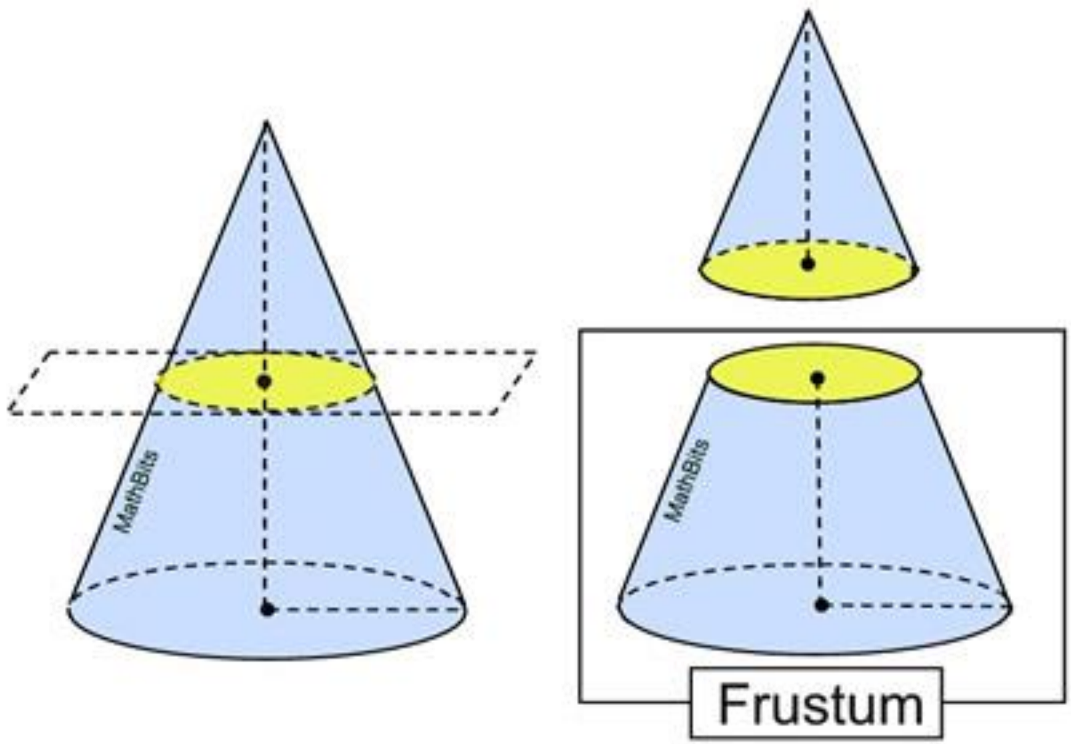


صفحه موازی مولد



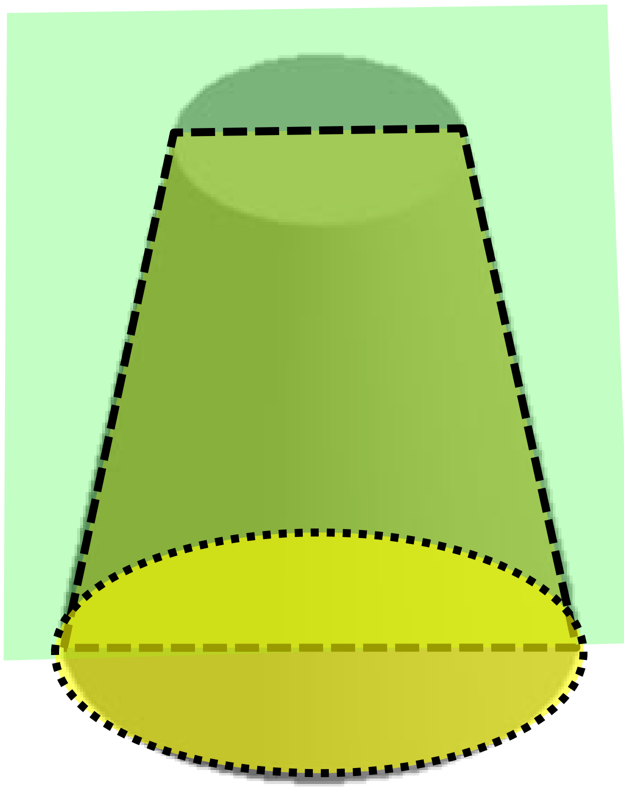
توجه : در سال های آینده با تعریف دقیق بیضی ، سهمی و دایره آشـــنا می شوید.

مخروط ناقص : اگر صفحه ای موازی قاعده یک مخروط قـائم ، آن را قطع کند . مخروط به دو بخـش تقســیم مــی شــود . در ایــن صــورت بخشی که بین قاعده و سطح مقطع است را مخروط ناقص می نامند.



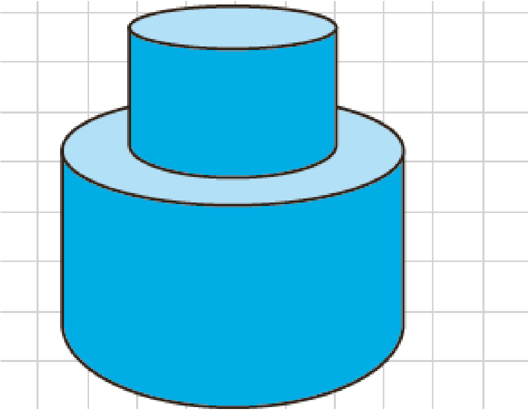
مخروط ناقص

سوال : اگر صفحه ای عمود بر قاعده های مخـروط نـاقص آن را قطـع کند . سطح مقطع حاصل چیست ؟

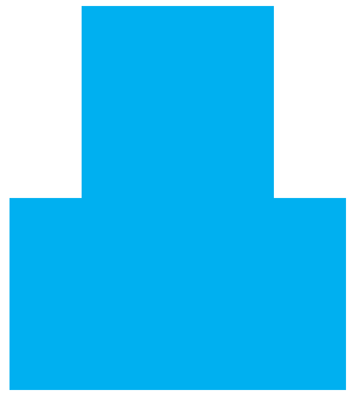


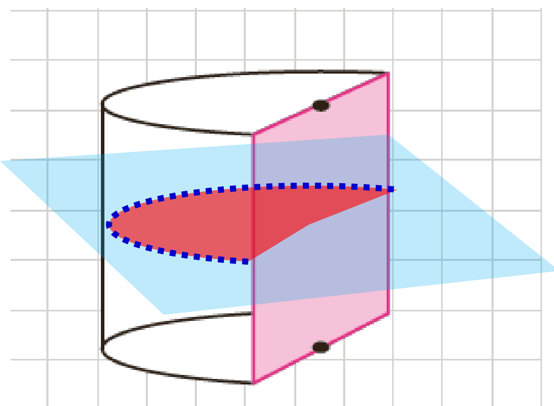
پاسخ : ذوزنقه

کاردرکلاس

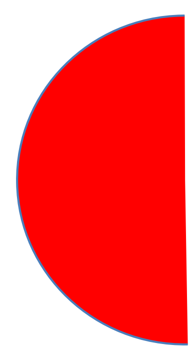


۱ــ دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

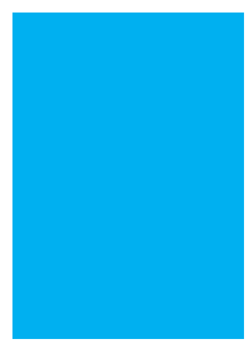




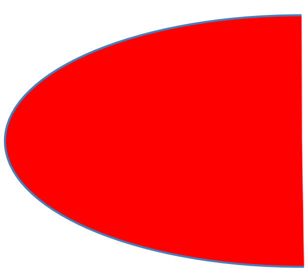
۲ــ در شکل روبه‌رو نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند به چه شکل است؟



سطح مقطع افقی



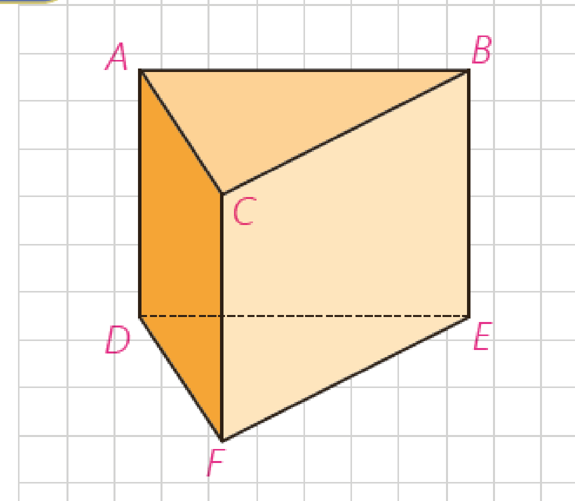
سطح مقطع قائم



سطح مقطع مایل

عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین



۱ــ فرض کنید منشور سمت راست، یک قطعهٔ چوبی توپر باشد. این قطعهٔ چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطهٔ مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

الف) M، N و P وسط پاره‌خط‌های BE، CF و AD

ب) C، D و E

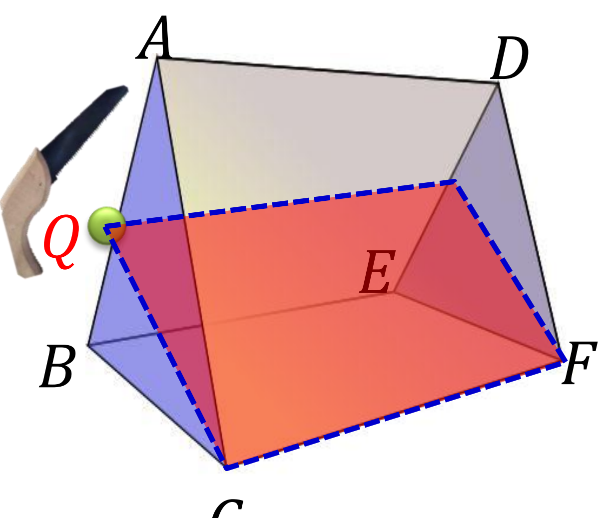
ج) C، F و Q (وسط پاره خط AB)

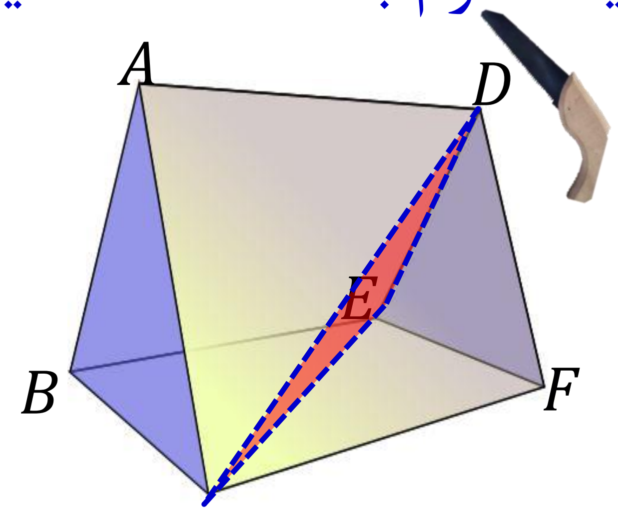
پاسخ :

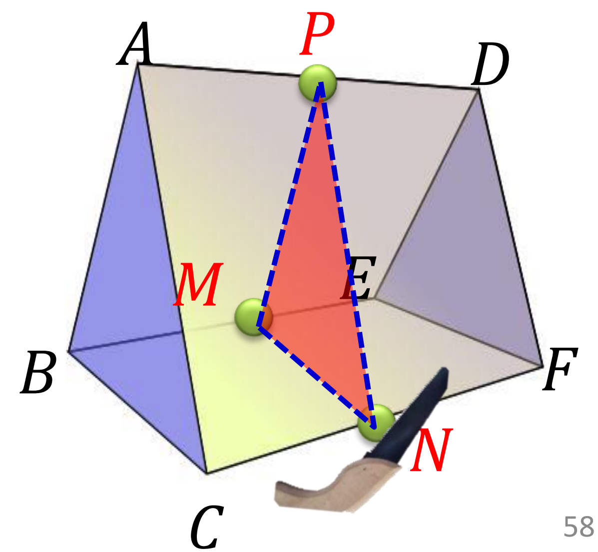
الف : دو منشور سه پهلو

ب : یک چهار وجهی و یک هرم با قاعده مستطیل

ج : دو منشور سه پهلو

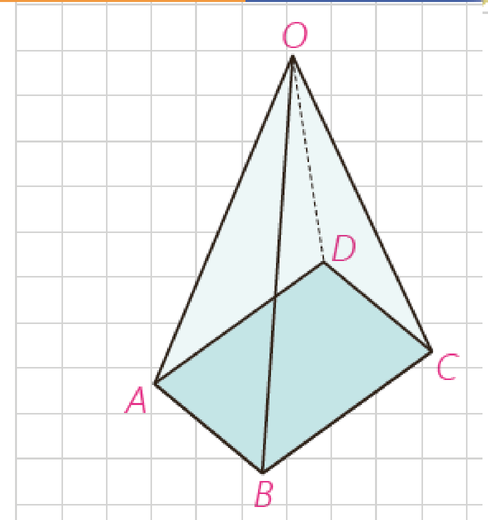






عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین



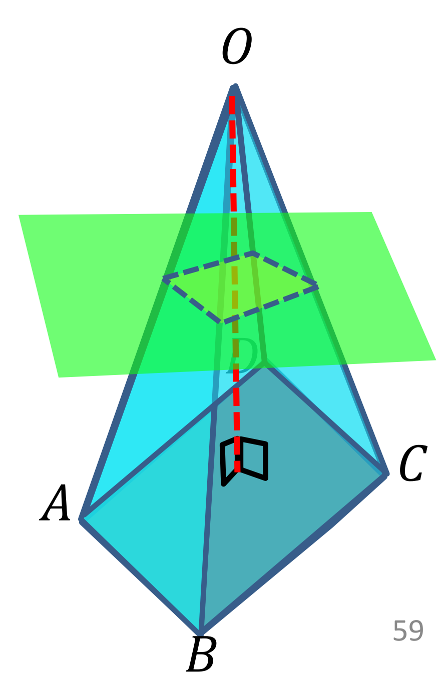
۲ــ قاعدهٔ هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

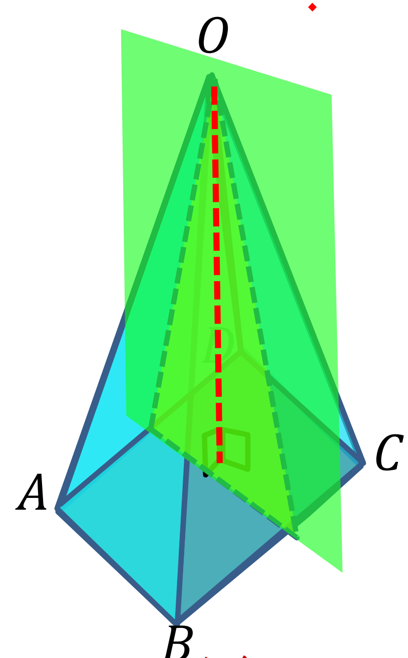
الف) صفحهٔ P بر ارتفاع هرم عمود باشد.

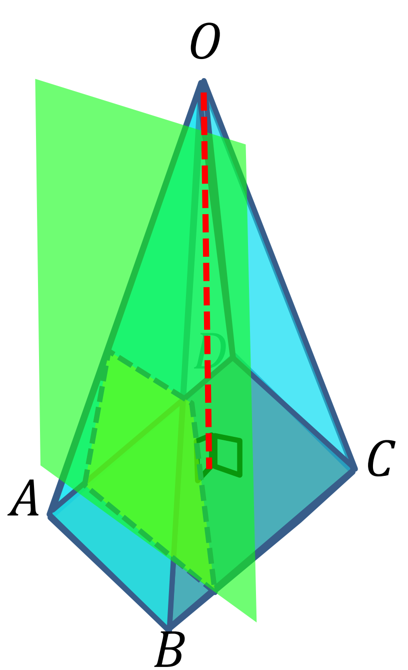
ب) صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

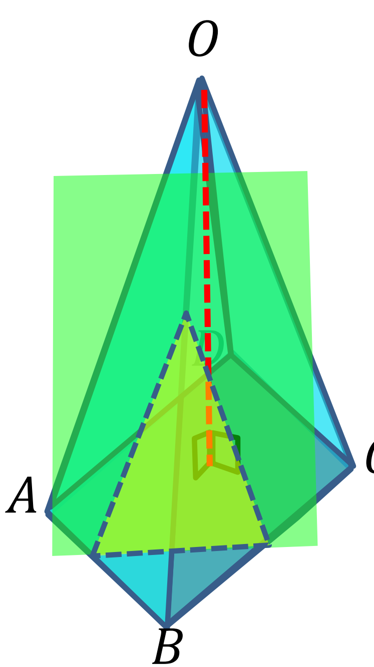
ج) صفحهٔ P از O نگذرد؛ ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

پاسخ : الف : مستطیل   ب : مثلث   ج : مثلث یا ذوزنقه







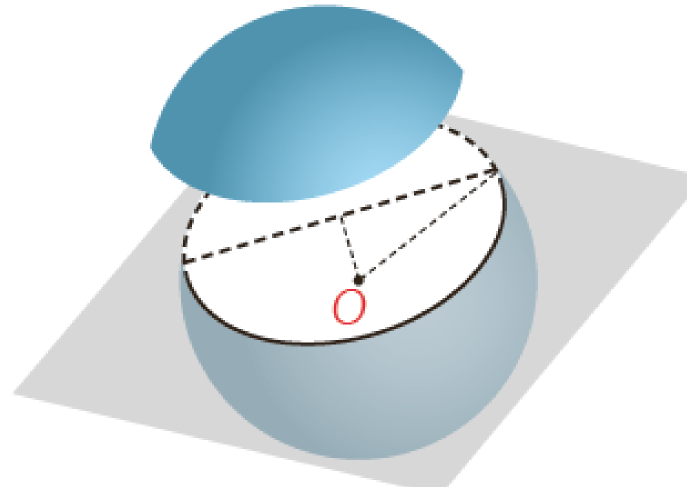


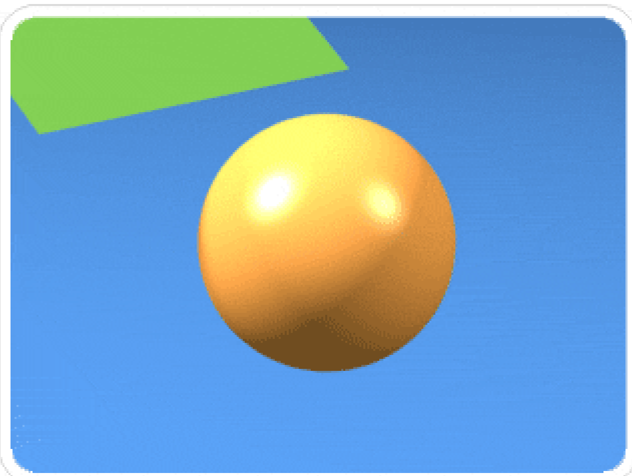
عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

تمرین

۳ـ صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟





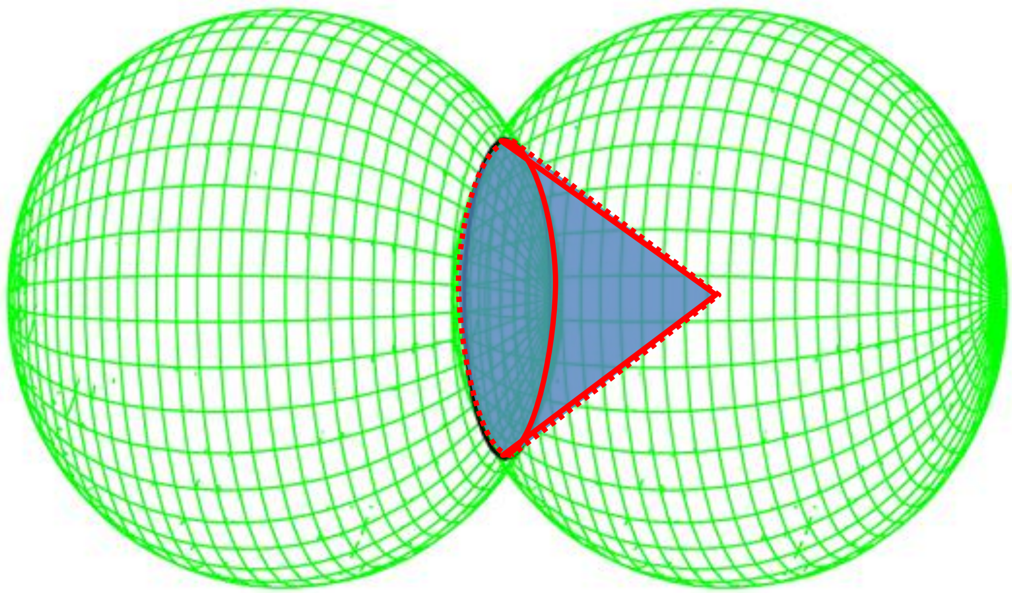
پاسخ :

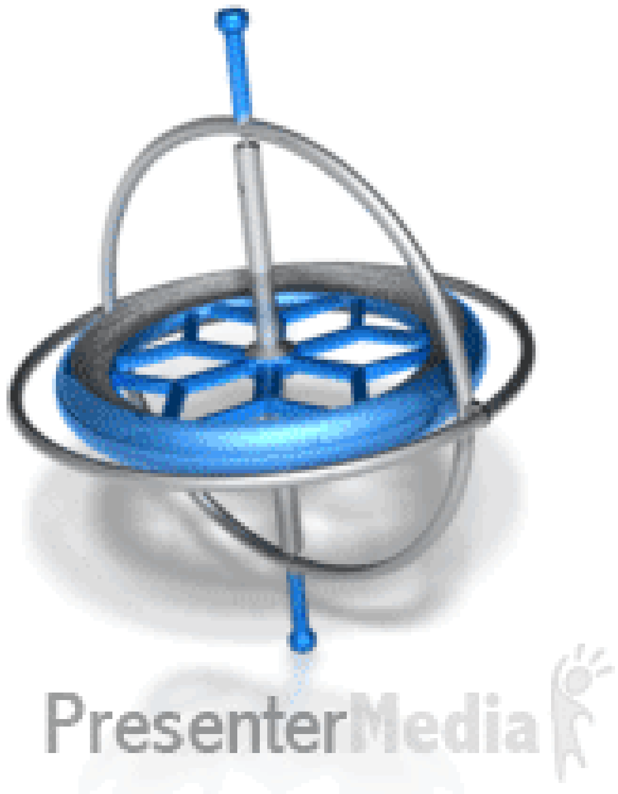
$$r^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow r = 4$$

$$S = \pi r^2 = 16\pi$$

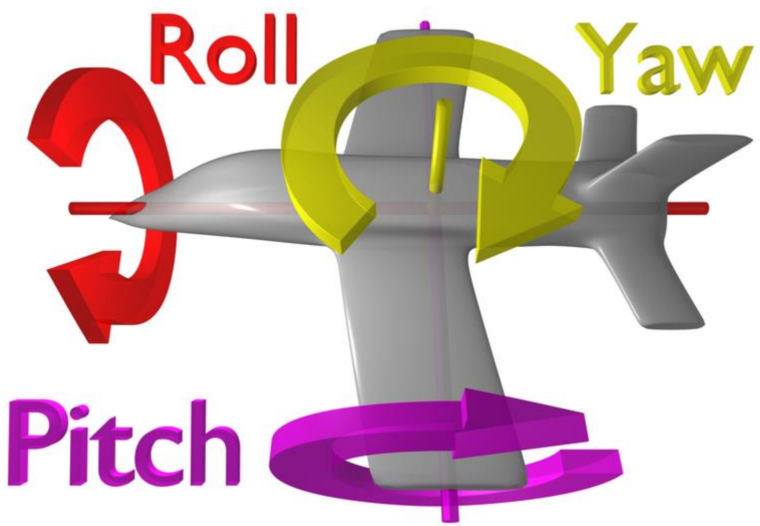
۴ــ دو کره با شعاع‌های r و r′ یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟ دایره

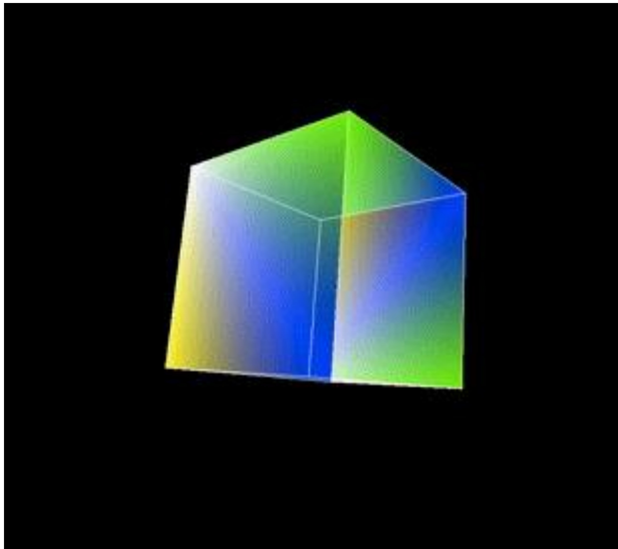
اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ مخروط





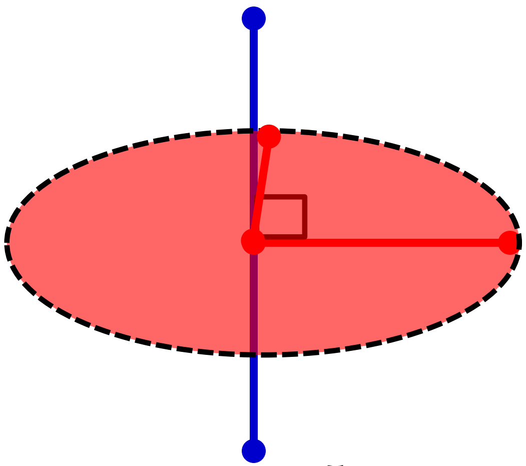
دوران حول محور





عادل محمدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان

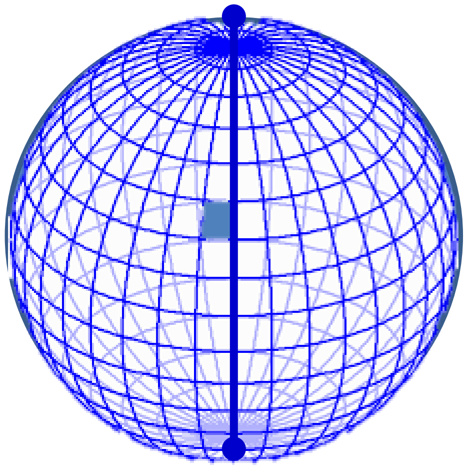
سوال ۱ : اگر دو پاره خط بر هم عمود باشند ، از دوران یکی از آنها حول دیگری چه شکلی ایجاد می شود ؟



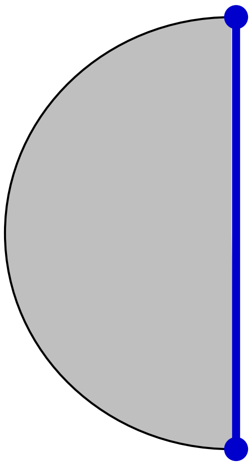
پاسخ : دایره

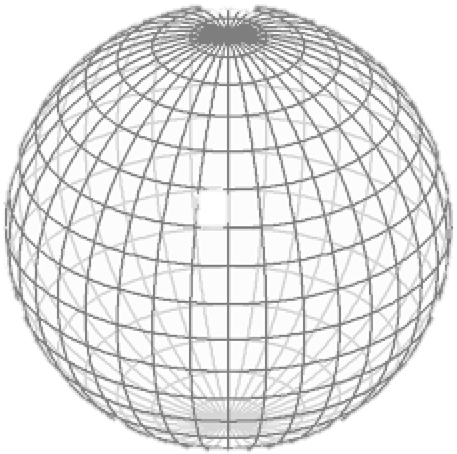
سوال ۲ : از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن چه شکلی ایجاد می شود ؟

پاسخ : کُره



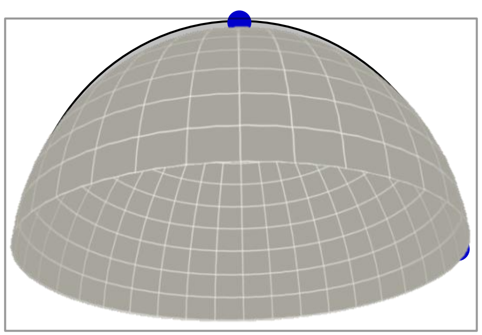
سوال ۳ : از دوران یک نیم دایره حول یکی از قطرهای آن چه شکلی ایجاد می شود ؟





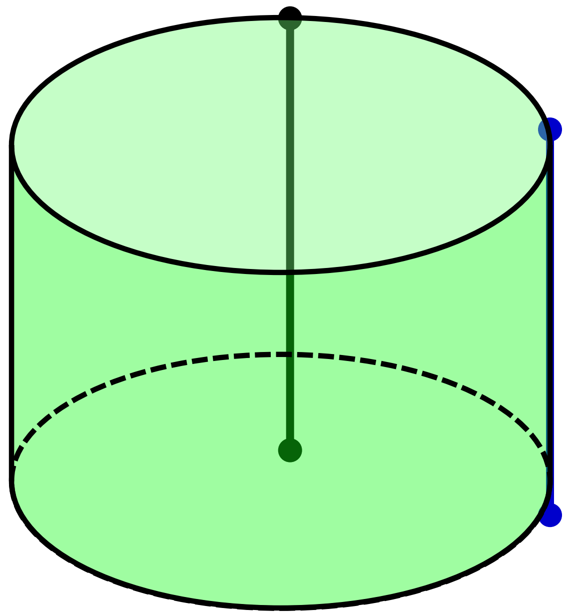
پاسخ : کره

سوال ۴ : از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود برقطر آن چه شکلی ایجاد می شود ؟

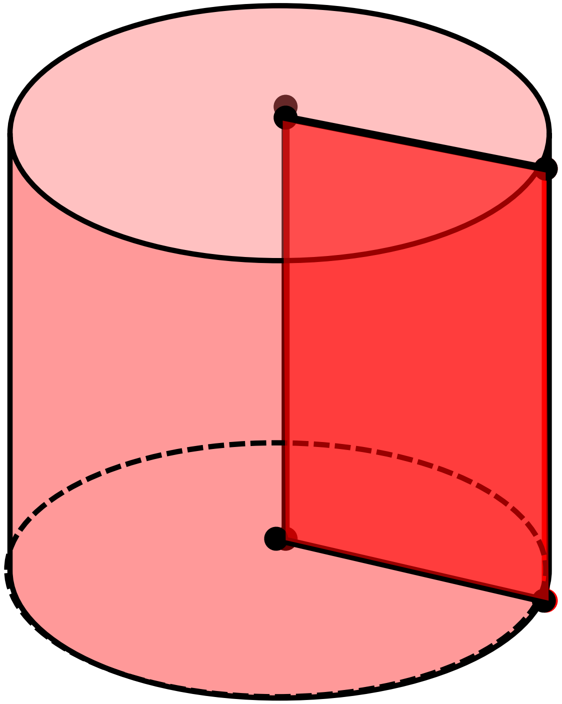


پاسخ : نیم کره

سوال ۵ : از دوران یکی از دو پاره خط موازی حول دیگری چه شکلی ایجاد می شود ؟



پاسخ : استوانه

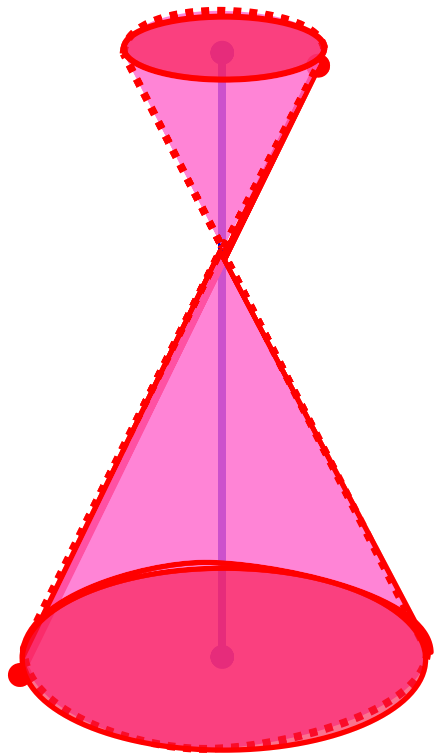


سوال ۶ : اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم چه شکلی تشکیل می شود ؟

پاسخ : استوانه

تمرین

۱ــ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خط‌ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



پاسخ : دو مخروط با رأس مشترک که ارتفاع های آنها در یک راستا است .

تمرین

۲ــ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن :

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه :

پ) دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها :

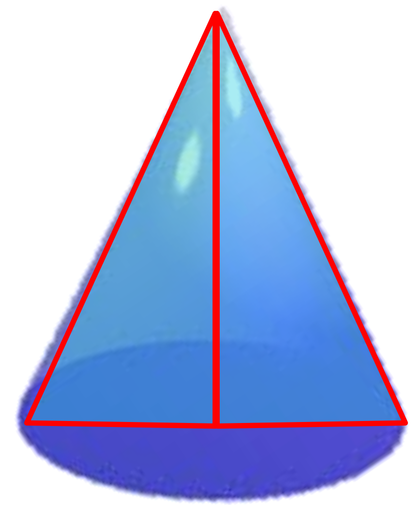
ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ آن :

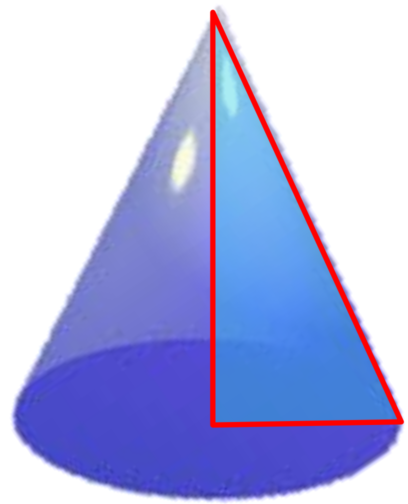
ت : دو مخروط با قاعده مشترک

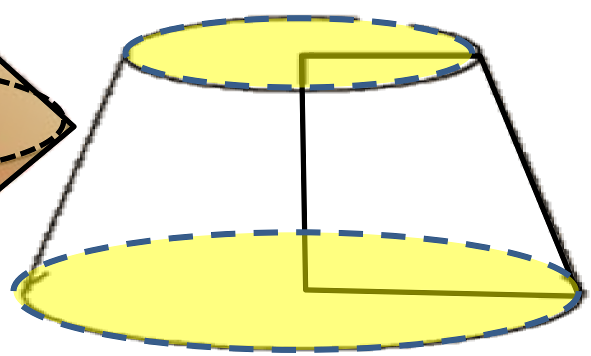
الف : مخروط

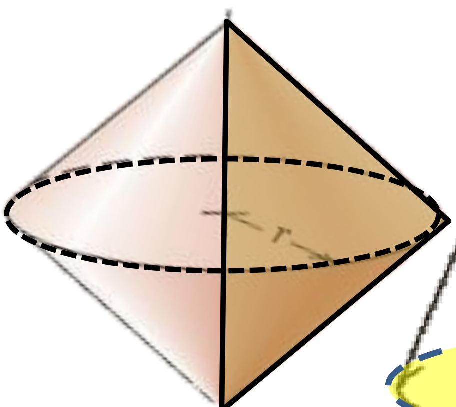
ب : مخروط

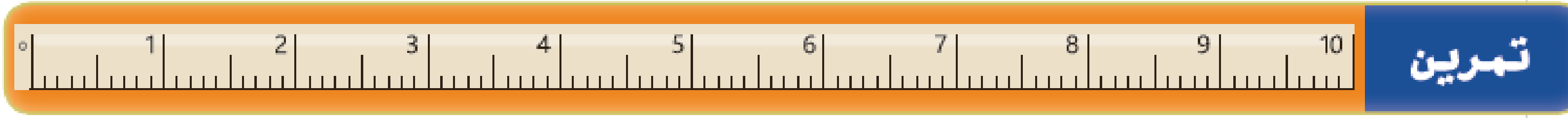
پ : مخروط ناقص

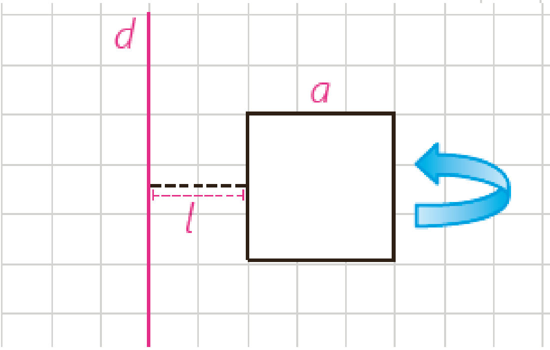




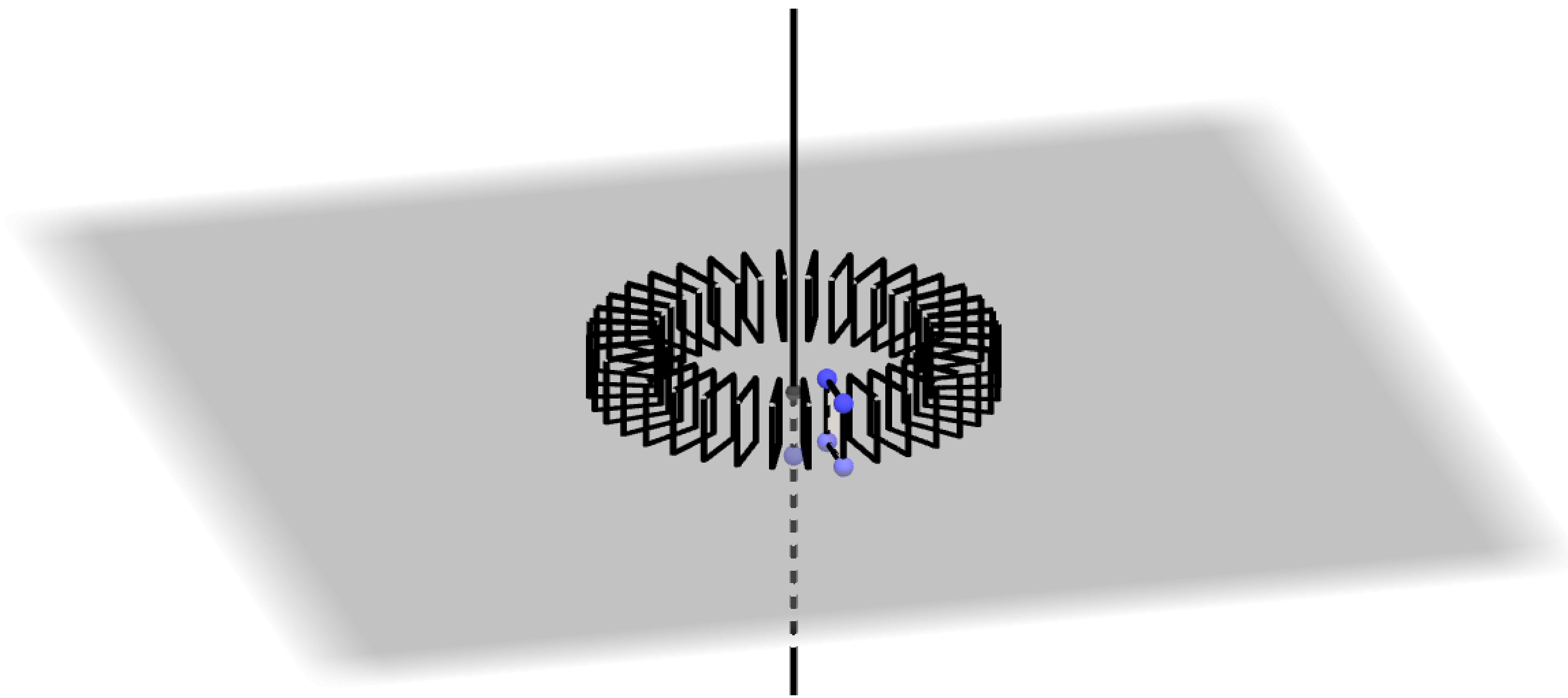




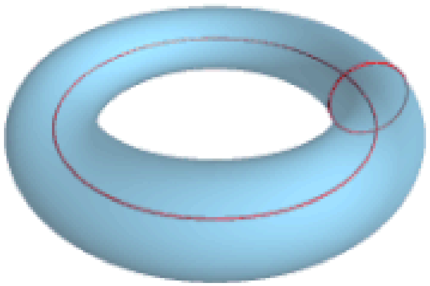


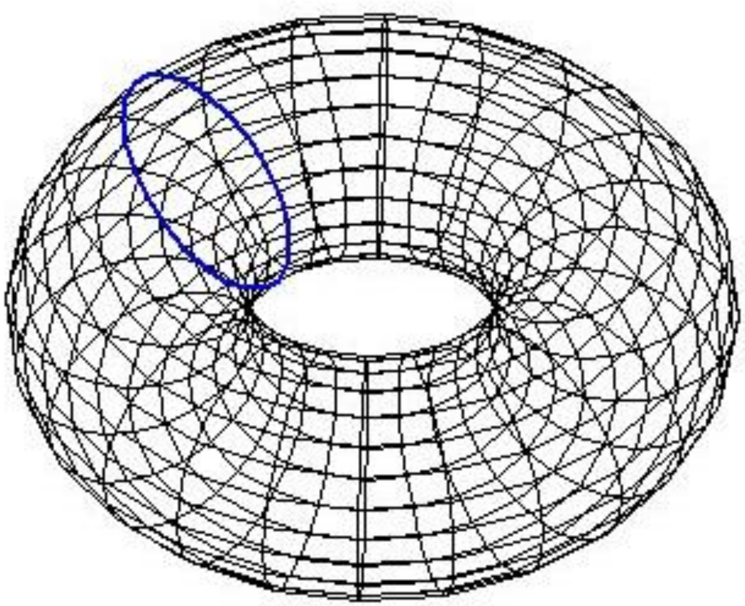


۳ــ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



۴ــ شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.





پاسخ : دایره

توجه : شکل ایجاد شده چنبره نام دارد.