آموزشگاه کنکور الوند

نمونه سوالات تشریحی

درس ریاضی

مباحث ترم اول

رشته تجربی / ریاضی

جهت هماهنگی برای ثبت نام

۰۹۱۷۴۴۴۷۸۵۲

www.alvandedu.com

alvandinst

خشایار خسروی

منا صداقت

عاطفه رحیمیان

نگار عدالتی

امین نجفی

دپارتمان ریاضی

۱ در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۲ و اختلاف مشترک (قدر نسبت) ۲۰ است. کدام جمله از دنباله برابر ۵۹۲ است؟

۲ اگر $n(A) = ۶۰$، $n(B) = ۷۰$ و $n(A - B) = ۱۵$، آنگاه $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۳ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۱۰ میلیون تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوم، در هر سال ۱۰ درصد نسبت به سال قبل از خود کاهش یابد. اگر او بعد از گذشت ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی آن را می‌تواند بفروشد؟ چرا؟

۴ در یک دنبالهٔ حسابی، جمله پنجم برابر ۱۳ و جملهٔ چهاردهم برابر ۴۰ است. قدرنسبت و جملهٔ اول دنباله را بیابید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (برای هر مورد، دلیل کوتاه بنویسید.)

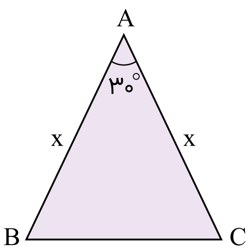
۵ فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند و $n(U) = ۱۷$، $n(A) = ۱۲$، $n(B) = ۴$ و $n(A \cap B) = ۲$ باشند. در این صورت $n(A' \cap B')$ برابر با .... است.

۶ جملهٔ یازدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۵۲ و جملهٔ نوزدهم آن، برابر ۹۲ است. جملهٔ سی‌ام این دنباله را بیابید.

۷ اعداد ۲^a و $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله متوالی یک دنباله هندسی‌اند. واسطه حسابی بین a و b را به‌دست آورید.

۸ در یک دنبالهٔ حسابی، $a_۱ + a_۴ + a_۷ + a_{۱۰} + a_{۱۳} = ۲۵$ و $a_۲ + a_۵ + a_۸ + a_{۱۱} + a_{۱۴} = ۲۷/۵$ است. جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

۹ مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۹ است. اندازهٔ x را به دست آورید.



به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۰ حاصل عبارت داده‌شده را به‌دست آورید.

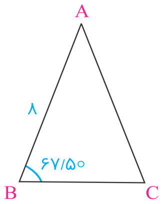
$$D = \frac{۱ + ۳\tan^۲ ۳۰^\circ - \cos ۹۰^\circ}{۴\cos^۲ ۳۰^\circ + \sqrt{۳}\tan ۱۸۰^\circ + ۲\cos^۲ ۴۵^\circ}$$

۱۱ اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ باشد، حاصل عبارت‌های داده‌شده را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

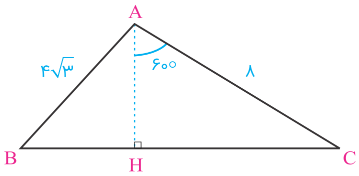
$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |۲\tan\alpha + \cot\alpha|$$

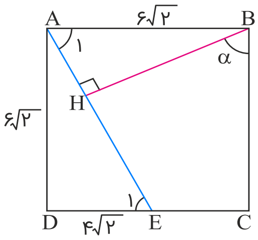
۱۲ مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC را به‌دست آورید. $(AB = AC)$



۱۳ در شکل داده‌شده، طول ضلع BC را به‌دست آورید.



۱۴ با فرض مربع بودن $ABCD$، مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.



۱۵ اگر $\sin\alpha = -\frac{۱}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد، حاصل $\sqrt{۲۵ - \cot^{۲}\alpha}$ را بیابید.

۱۶ اگر α زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{۲۵}{۷} = \frac{\tan\alpha + \cot\alpha}{\tan\alpha - \cot\alpha}$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱۷ مجموع دو عدد برابر ۶ و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۲۰ است. مجموع مکعبات این اعداد را به دست آورید.

۱۸ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $(m, n > ۰)$

$$(m^{\frac{۲}{۳}}n^{\frac{۱}{۶}})^{۳}(mn^{\frac{۱}{۲}}) =$$

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱۹ عبارت $\sqrt{\sqrt{۸۱}}$، برابر با عدد صحیح .... است.

۲۰ عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

الف $x^{۴} - ۱۶$

ب $x^{۲} + ۲x - ۳$

۲۱ اگر $۰ < b < ۱$ باشد، مقدار عبارت $\sqrt{(b - \sqrt[۳]{b})^{۲}} - \sqrt{(b - \sqrt{b})^{۲}} + \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt[۳]{b})^{۲}}$ را به دست آورید.

۲۲ اگر $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x}$، حاصل $\dfrac{z - 3\sqrt[3]{xyz}}{x + y}$ را بیابید.

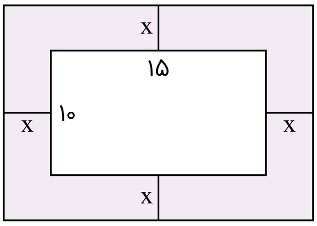
۲۳ معادلهٔ کلی سهمی به‌صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. معادلهٔ یک سهمی را بیابید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند و از نقاط $(1, 2)$ و $(-1, 0)$ بگذرد.

۲۴ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $f(x) = ax^2 + bx$ از نقطهٔ $(3, 5)$ بگذرد و تساوی $f(-1) = 3$ برقرار باشد.

۲۵ سهمی به معادلهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c$ مفروض است. اگر نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض (-1) و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول (1) قطع کند و داشته باشیم $f(2) = 3$، مقادیر a، b و c را بیابید.

۲۶ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{-(x-4)^2}{2x+1} \geq 0$ را به دست آورید.

۲۷ یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همه لبه‌های عکس تا قاب برابر x باشد، مقدار x را پیدا کنید.



معادله‌های درجه دوم زیر را به روش‌های خواسته‌شده حل کنید.

۲۸ روش تجزیه: $x^2 - 3x = 0$

۲۹ روش کلی (Δ): $3x^2 + 5x - 2 = 0$

۱

$$a_n = a_۱ + (n-۱) \times d \quad , \quad ۵۹۲ = ۱۲ + (n-۱) \times ۲۰$$

$$۵۹۲ - ۱۲ + ۲۰ = ۲۰n \quad \Rightarrow \quad ۶۰۰ = ۲۰n \quad \Rightarrow \quad n = ۳۰$$

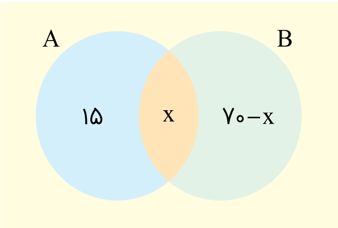
۲

روش اول:

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$$
$$\Rightarrow ۱۵ = ۶۰ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۴۵$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۶۰ + ۷۰ - ۴۵ = ۸۵$$

روش دوم:



$$۶۰ = ۱۵ + x \Rightarrow x = ۴۵$$

$$n(A \cup B) = ۱۵ + ۴۵ + (۷۰ - ۴۵) = ۸۵$$

۳

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۳ = ۷,۲۹۰,۰۰۰$$

یا

$$۹,۰۰۰,۰۰۰ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۲ = ۷,۲۹۰,۰۰۰$$

یا

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{۹}{۱۰}} ۹,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{۹}{۱۰}} ۸,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{\times \frac{۹}{۱۰}} ۷,۲۹۰,۰۰۰$$

۴

$$\begin{array}{l} a_۱ + ۱۳d = ۴۰ \\ a_۱ + ۴d = ۱۳ \\ \hline ۹d = ۲۷ \end{array}$$

$$\Rightarrow d = ۳ \; , \; a_۱ = ۱$$

پاسخ سؤال ۵

۵

$$n(A\cup B)=۱۲+۴-۲=۱۴$$
$$n(A\cap B)=n(U)-n(A\cup B)=۱۷-۱۴=۳$$

۶ داریم:

$$\begin{cases}a_{۱۹}=a_{۱}+۱۸d=۹۲\\ a_{۱۱}=a_{۱}=۱۰d=۵۲\end{cases}\Rightarrow ۸d=۴۰\Rightarrow d=۵\Rightarrow a_{۱}=۲$$

پس جملهٔ سی‌ام این دنباله برابر است با:

$$a_{۳۰}=a_{۱}+۲۹d=۲+۲۹\times ۵=۱۴۷$$

۷

$$(۴\sqrt{۲})^{۲}=۲^{a}\times ۲^{b}\quad\Rightarrow\quad ۳۲=۲^{a+b}\quad\Rightarrow\quad ۲^{a+b}=۲^{۵}\quad\Rightarrow\quad a+b=۵$$
$$\text{واسطه حسابی}=\frac{a+b}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۸

$$\begin{cases}a_{۲}+a_{۵}+a_{۸}+a_{۱۱}+a_{۱۴}=۲۷/۵\\ a_{۱}+a_{۴}+a_{۷}+a_{۱۰}+a_{۱۳}=۲۵\end{cases}$$

این دو را از هم کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow ۵d=۲/۵\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow a_{۱}+a_{۱}+۳d+a_{۱}+۶d+a_{۱}+۹d+a_{۱}+۱۲d=۲۵$$
$$\Rightarrow ۵a_{۱}+۳۰d=۲۵\Rightarrow ۵a_{۱}+۱۵=۲۵\Rightarrow a_{۱}=۲$$

۹

$$S=\frac{۱}{۲}x^{۲}\sin ۳۰^{\circ}=۹\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times x^{۲}\times\frac{۱}{۲}=۹\Rightarrow x^{۲}=۳۶$$
$$\xrightarrow{x>۰}x=۶$$

پاسخ سؤال ۱۰

۱۰

$$D=\frac{۱+۳\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}-۰}{۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}+\sqrt{۳}\times ۰+۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱ α در ناحیهٔ اول مثلثاتی است و چون $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$:

$$\sin\alpha > \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha > ۰$$

$$\tan\alpha > \cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha - \cot\alpha > ۰$$

$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$= -\sin\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha = ۲\cos ۲$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |۲\tan\alpha + \cot\alpha|$$

$$= -\cot\alpha + \tan\alpha + ۲\tan\alpha + \cot\alpha = ۳\tan\alpha$$

۱۲

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۶۷/۵ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - (۶۷/۵ + ۶۷/۵)$$

$$\hat{A} = ۴۵ \Rightarrow S_\Delta = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$S_\Delta = ۱۶\sqrt{۲}$$

۱۳

$$A\overset{\Delta}{H}C : \begin{cases} \cos ۶۰^\circ = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{AH}{۸} \Rightarrow AH = ۴ \\ \sin ۶۰^\circ = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{HC}{۸} \Rightarrow HC = ۴\sqrt{۳} \end{cases}$$

راه ساده‌تر: ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است، پس چون $\hat{C} = ۳۰^\circ$، پس $AH = \frac{۸}{۲} = ۴$. ضلع روبه‌روی به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، پس $CH = ۴\sqrt{۳}$.

$$A\overset{\Delta}{H}C : \text{رابطهٔ فیثاغورس} \Rightarrow BH^۲ = (۴\sqrt{۳})^۲ - ۴^۲ = ۳۲$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow BC = BH + HC = ۴\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} = ۴(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})$$

۱۴

$$\text{مطابق شکل} : BH \perp AE \Rightarrow \alpha = \hat{A}_۱$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \alpha \\ \text{موازی و مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_۱ = \alpha$$

$$\Rightarrow \tan\hat{E}_۱ = \tan\alpha = \frac{AD}{DE} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۳}{۲}$$

۱۵

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow (-\frac{۱}{۵})^۲ + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}$$

در ربع سوم $\cos\alpha$ منفی است، پس $-\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}$ قابل‌قبول است.

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}}{-\frac{۱}{۵}} = \sqrt{۲۴}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲۵ - \cot^۲\alpha} = \sqrt{۲۵ - (\sqrt{۲۴})^۲} = \sqrt{۲۵ - ۲۴} = \sqrt{۱} = ۱$$

۱۶

$$\frac{\tan\alpha+\frac{۱}{\tan\alpha}}{\tan\alpha-\frac{۱}{\tan\alpha}}=\frac{۲۵}{۷}\Rightarrow\frac{\tan^{۲}\alpha+۱}{\tan^{۲}\alpha-۱}=\frac{۲۵}{۷}\Rightarrow ۷\tan^{۲}\alpha+۷=۲۵\tan^{۲}\alpha-۲۵$$

$$\Rightarrow ۳۲=۱۸\tan^{۲}\alpha\Rightarrow\tan^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\cot^{۲}\alpha=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\cot^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶}}\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$$

۱۷

نکته:

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$$

دو عدد موردنظر را a و b می‌نامیم. حال به کمک مقادیر داده‌شده، مقدار ab را به دست می‌آوریم:

$$a+b=۶\Rightarrow(a+b)^{۲}=۳۶\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+۲ab=۳۶$$

$$\xrightarrow{a^{۲}+b^{۲}=۲۰}۲۰+۲ab=۳۶\Rightarrow ab=۸$$

بنابراین:

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}+b^{۲}-ab)=۶\times(۲۰-۸)=۶\times۱۲=۷۲$$

۱۸

$$m^{۲}n^{\frac{۱}{۲}}.mn^{\frac{۱}{۲}}=m^{۳}n$$

پاسخ سؤال ۱۹

۱۹

۳

۲۰

الف

$$(x^{۲}-۴)(x^{۲}+۴)\Rightarrow(x-۲)(x+۲)(x^{۲}+۴)$$

ب

$$(x-۱)(x+۳)$$

۲۱

$$\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt[۳]{b})^{۲}}+\sqrt{(b-\sqrt{b})^{۲}}-\sqrt{(b-\sqrt[۳]{b})^{۲}}$$

$$=|\underbrace{\sqrt{b}-\sqrt[۳]{b}}_{-}|+|\underbrace{b-\sqrt{b}}_{-}|-|\underbrace{b-\sqrt[۳]{b}}_{-}|$$

$$=\cancel{\sqrt[۳]{b}}-\cancel{\sqrt{b}}+\cancel{\sqrt{b}}-\cancel{b}+\cancel{b}-\cancel{\sqrt[۳]{b}}=۰$$

۲۲

$$\sqrt[۳]{z}=\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}\Rightarrow\begin{array}{l}z=x+y+۳(\sqrt[۳]{x^{۲}y}+\sqrt[۳]{xy^{۲}})\\ \sqrt[۳]{xyz}=\sqrt[۳]{x^{۲}y}+\sqrt[۳]{xy^{۲}}\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{xyz}=۳(\sqrt[۳]{x^{۲}y}+\sqrt[۳]{xy^{۲}})\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{z-۳\sqrt[۳]{xyz}}{x+y}=\frac{x+y+۳(\sqrt[۳]{x^{۲}y}+\sqrt[۳]{xy^{۲}})-۳(\sqrt[۳]{x^{۲}y}+\sqrt[۳]{xy^{۲}})}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}=۱$$

$$\Delta = \mathrm{b}^{۲} - ۴\mathrm{ac} = ۵^{۲} - ۴(۳)(-۲) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\Delta}}{۲\mathrm{a}} = \frac{-۵ \pm \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_{۱} = \dfrac{-۵ + ۷}{۶} = \dfrac{۲}{۶} = \dfrac{۱}{۳} \\ \mathrm{x}_{۲} = \dfrac{-۵ - ۷}{۶} = \dfrac{-۱۲}{۶} = -۲ \end{cases}$$