آموزشگاه کنکور الوند

هندسه ۲

پایه یازدهم

کل کتاب

برای دسترسی به خلاصه تمامی دروس و تهیه پکیج امتحان نهایی با مادر ارتباط باشید.

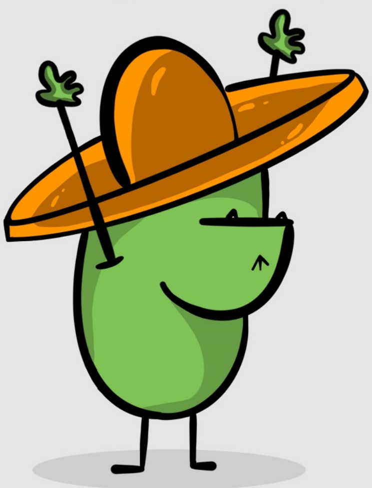
۰۷۱۳۸۲۲۹۵۵۰
۰۹۱۷۴۴۴۷۸۵۲

۰۹۳۸۴۳۷۷۸۵۲
۰۹۳۸۳۷۲۷۸۵۳

بخش مشاوره
۰۹۳۶۴۱۶۰۷۱۳

www.alvandedu.com
alvandinst
alvand_moshaver
khosravimathematics

تو حتما توی
امتحان ها موفق میشی



فصل اول: دایره

۱. یک نقطه مانند M که در صفحه دایره $C(O,R)$ قرار دارد می‌تواند خارج دایره یا روی دایره یا درون دایره باشد در این صورت فاصله M تا مرکز دایره (طول پاره‌خط OM) به ترتیب بزرگ‌تر مساوی یا کوچک‌تر از شعاع دایره است.

۲. برای تشخیص وضعیت دایره $C(O,R)$ و خط d که در یک صفحه قرار دارند فاصله مرکز دایره تا خط d را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. اگر این فاصله بزرگ‌تر مساوی یا کوچک‌تر از شعاع دایره باشد به ترتیب خط d دایره را قطع نمی‌کند یا بر دایره مماس است یا در دو نقطه با دایره متقاطع خواهد بود.

۳. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع از دایره باشد. اندازه زاویه مرکزی برابر کمان روبه‌رویش است.

٤. زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن وترهایی از دایره است. اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌رویش است.

۵. زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره بوده و یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.

✓اندازه زاویه، ظلی نصف کمان روبه‌رویش است.

٦. کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.

۷. در هر دایره قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

۸. از هر نقطه درون دایره، بی‌شمار وتر عبور می‌کند. بزرگ‌ترین وتر همان قطر گذرنده از آن نقطه است و کوتاه‌ترین وتر، وتری عمود بر قطر است در همان نقطه.

۹. از هر نقطه خارج، دایره دو مماس مساوی بر آن دایره رسم می‌شود.

۱۰. دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط‌المرکزین d را در نظر بگیرید. با مقایسه d با $R+R'$ و $|R-R'|$ به **نتایج زیر** می‌رسیم:

الف) $d > R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره متخارج‌اند

ب) $d = R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند

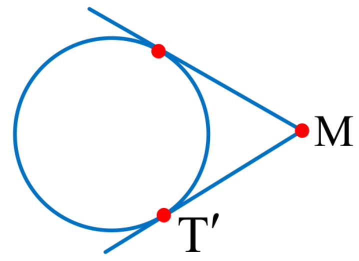
$|R+R'| < d < R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند

ت) $d = |R-R'| \Leftrightarrow$ دو دایره مماس داخل‌اند

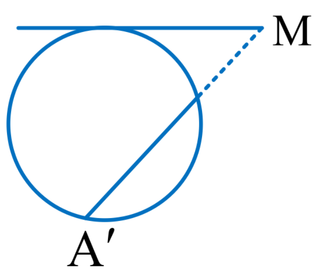
ث) $0 < d < |R-R'| \Leftrightarrow$ دو دایره متداخل‌اند

ج) $d = 0 \Leftrightarrow$ دو دایره هم‌مرکزند

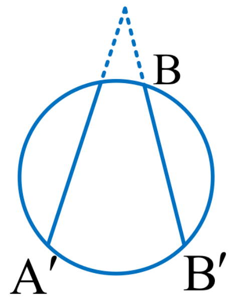
۱۱. برای تعیین زاویه بین دو وتر یا امتدادشان، زاویهٔ بین یک وتر و یک مماس و در نهایت زاویه بین دو مماس مرسوم بر دایره از روابط زیر کمک می‌گیریم:



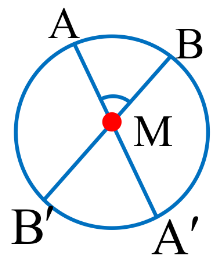
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TAT'}-\overset{\frown}{TBT'}}{2}$$



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{A'T}-\overset{\frown}{AT}}{2}$$



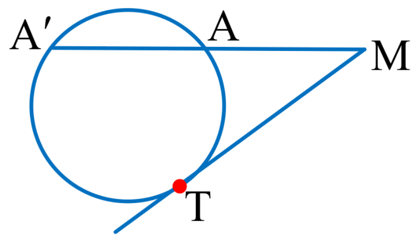
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$



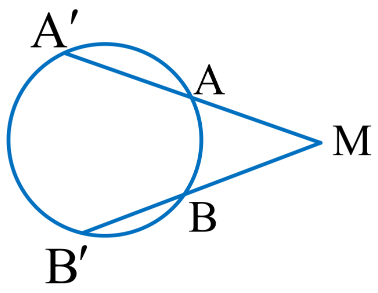
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

۱۲. کمان‌های محصور به دو وتر موازی، با هم مساوی‌اند.

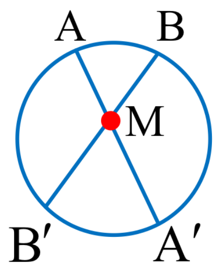
۱۳. مهم‌ترین روابط طولی بین طول قطعات حاصل از تقاطع وترها درون و بیرون دایره و همچنین رابطه آن‌ها با طول مماس به ترتیب زیر است:



$$MT^2=MA\times MA'$$



$$MA\times MA'=MB\times MB'$$



$$MA\times MA'=MB\times MB'$$

۱۴. طول مماس‌های مشترک داخلی و خارجی دو، دایره از دستورات زیر به دست می‌آید.

R و R' شعاع دو دایره $TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$ طول مماس مشترک داخلی

D طول خط‌المرکزین دو دایره $TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$ طول مماس مشترک خارجی

۱۵. شعاع دایره محاطی یک ضلعی به محیط ۲P و مساحت S عبارت است از $r=\frac{S}{P}$.

۱۶. هر مثلث، سه دایره محاطی خارجی هم دارد که مرکز هر کدام محل تلاقی دو نیمساز خارجی به همراه نیمساز داخلی رأس سوم است.

شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A

$$\overset{\uparrow}{r_a}=\frac{S}{\underset{\downarrow}{P-a}}\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}$$

نصف محیط

۱۷. در هر چهارضلعی محیطی، جمع دو ضلع مقابل با جمع دو ضلع مقابل دیگر مساوی است و برعکس.

۱۸. در هر چهارضلعی محاطی، دو زاویه مقابل مکمل یکدیگرند و برعکس.

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۱. تبدیلی مانند T، تابعی است که هر نقطه A از صفحه P را به یک و فقط یک نقطه مثل، A' از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس. به عبارت دیگر تبدیل T، تابعی یک‌به‌یک از صفحه روی خودش است، یعنی در تبدیل هیچ دو نقطه متمایزی دارای یک تصویر نیستند.

۲. در هر تبدیل نقطه‌ای را که تبدیل یافته‌اش بر خود نقطه اولیه منطبق باشد، **نقطه ثابت تبدیل** می‌گوییم.

۳. تبدیلی که در آن طول پاره‌خط حفظ می‌شود **تبدیل ایزومتری (طولپا)** نام دارد.

۴. تصویر هر خط تحت اثر یک تبدیل، ایزومتری خطی راست.

۵. هر تبدیل، ایزومتری اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۶. انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ تبدیلی است از صفحه که در آن تصویر نقطه A نقطه‌ای مثلث A' است از همان صفحه به طوری‌که $\overline{AA'} = \vec{v}$.

۷. بازتاب S نسبت به خط d، تبدیلی است که هر نقطه مثل A را که روی خط d قرار نداشته باشد را به نقطه‌ای مثل A' تصویر می‌کند، طوری که d عمودمنصف AA' باشد. تصویر هر نقطه مثل B که روی d است هم بر خودش منطبق خواهد شد.

۸. برای رسم بازتاب یک پاره‌خط نسبت به خط d، از دو سر آن پاره‌خط بر d عمود کرده و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم، سپس تصاویر حاصل را به هم وصل می‌کنیم.

۹. دوران R به مرکز O و زاویه α، تبدیلی از صفحه است که نقطه A از این صفحه را به A' تصویر می‌کند طوری که $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ باشد.

۱۰. در یک تجانس به مرکز، مجانس نقطه A از صفحه P، نقطه‌ای مثل A' است که $OA' = |k|OA$ که k در این رابطه، نسبت تجانس یا عامل مقیاس است.

۱۱. اگر $k > ۰$ باشد، **تجانس مستقیم** است یعنی نقطه A و مجانس آن A' در یک طرف مرکز تجانس هستند.

۱۲. اگر $k < ۰$ باشد، **تجانس معکوس** است، یعنی نقطه A و مجانس آن A' در دو طرف مرکز تجانس هستند.

۱۳. اگر $|k| > ۱$ باشد، **تجانس از نوع انبساط** است، یعنی ابعاد شکل ثانویه بزرگ‌تر از ابعاد شکل اولیه است.

۱۴. اگر $۰ < |k| < ۱$ باشد، **تجانس از نوع انقباض** است، یعنی ابعاد شکل ثانویه کوچک‌تر از ابعاد شکل اولیه است.

۱۵. تبدیل T را **همانی** می‌گوییم، هرگاه تصویر هر نقطه مثل A از صفحه P روی خودش منطبق شود $A' = T(A) = A$

۱۶. انتقال با بردار صفر، تجانس با نسبت $k = ۱$ و دروان با زاویهٔ ۳۶۰° و مضارب صحیح، آن هر شکل را به خودش تبدیل می‌کنند.

۱۷. ویژگی‌های انتقال:

۱) ایزومتری است. ۲) شیب خط را حفظ می‌کند. ۳) جهت شکل را حفظ می‌کند.

۱۸. وِیژگی‌های بازتاب محوری:

۱) ایزومتری است.

۲) شیب خط را حفظ نمی‌کند (مگر این‌که خط موازی یا عمود بر محور تقارن باشد)

۳) جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

٤) اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۲۰. ویژگی‌های تجانس:

۱) ایزومتری نیست. ۲) شیب خط را حفظ می‌کند. ۳) زاویه را حفظ می‌کند.

٤) خطوطی که نقاط مجانس را به هم وصل می‌کنند در مرکز تجانس همرس‌اند.

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

۱. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع قائمه و برعکس.

۲. در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

۳. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب طول قطعاتی که از رسم این ارتفاع روی وتر پدید می‌آید.

٤. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول هر ضلع قائم برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

۵. در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل‌ضرب دو ضلع قائم برابر است با حاصل‌ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر.

٦. قضیه سینوس‌ها: در هر مثلث، نسبت طول هر ضلع بر سینوس زاویه روبه‌روی آن برابر است با قطر دایره محیطی:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

۸. قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

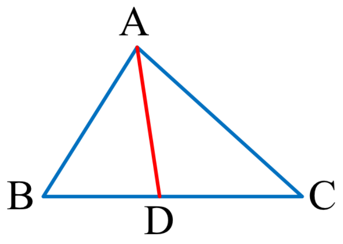
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

۹. با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها، قضیه‌ای مرسوم به قضیه میانه‌ها به تر تیب زیر بیان می‌شود:

$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}$$

$$a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}$$

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$



۹. قضیه نیمساز داخلی: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند.

$\hat{A}$ نیمساز داخلی $AD \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

۱۰. طول نیمساز داخلی هر زاویه مثلث از دستور زیر به دست می‌آید: (مثلاً طول نیمساز داخلی A مثلث ABC):

$$\underbrace{AD^2}_{\text{مربع طول نیمساز زاویه } \hat{A}}=\underbrace{AB\times AC}_{\text{ضرب دو ضلع زاویه } \hat{A}}-\underbrace{BD\times DC}_{\text{ضرب دو قطعه‌ای که از رسم نیمساز روی ضلع سوم پدید آمده}}$$

۱۱. دستورات محاسبه مساحت مثلث به صورت روبه‌رو جمع‌آوری می‌شود:

الف) $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} a h_a = \frac{۱}{۲} b h_b = \frac{۱}{۲} c h_c$

ب) $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} ab \sin \hat{C} = \frac{۱}{۲} ac \sin \hat{B} = \frac{۱}{۲} bc \sin \hat{A}$

پ) $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ و $P = \frac{a+b+c}{۲}$