آموزشگاه کنکور الوند

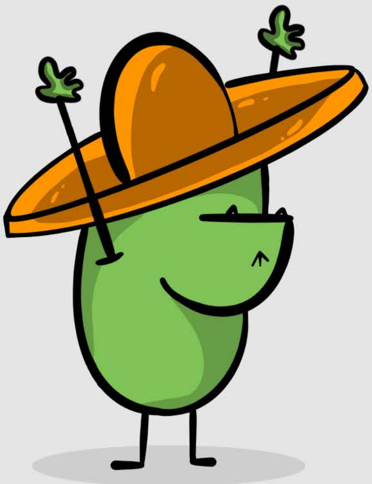
هندسه ۳

پایه دوازدهم

کل کتاب

برای دسترسی به خلاصه تمامی دروس و تهیه پکیج امتحان نهایی با مادر ارتباط باشید.

تو حتما توی
امتحان ها موفق میشی



فصل ۱: ماتریس و کاربرد

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود.

تعریف مرتبه ماتریس: اگر ماتریس مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$

تعریف چند ماتریس خاص:

۱. ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد.

۲. ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد.

۳. ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرهای ان با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس مربعی مرتبه $n\,(n\times n)$ می‌نامیم.

۴. ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند.

۵. ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند.

نکته مهم: در حالت خاص، اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهیم.

۶. ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های نشان می‌دهیم.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبه $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[a_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

قرینه یک ماتریس: اگر $A_{m\times n}$، آنگاه قرینه ماتریس A، از ضریب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبه $m\times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+B=B+A$
$\begin{cases} rA=rB \\ r\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=B$	$A=B \Rightarrow rA=rB$	$(r\pm s)A=rA\pm sA$	$r(A\pm B)=rA\pm rB$

ضرب ماتریس‌ها:

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب A در B، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n)، آنگاه ماتریس AB از مرتبه $m\times n$ است.

خاصیت مهم ماتریس‌ها:

$A\times I=I\times A=A$	$A\times B\neq B\times A$
$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$	$A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است، به طوری‌که $AB = BA = I$ ، در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

نحوه محاسبه وارون ماتریس ۲×۲:

وارون ماتریس ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \ , \quad ad-bc \neq 0$$

مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم. $|A| = ad-bc$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون:

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

برای حل یک دستگاه معادله دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم:

$AX = B$

سپس اگر A وارون‌پذیر باشد وارون A را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم: $X = A^{-1}B$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول:

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.

پ) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

نکته مهم: اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

اگر $|A| \neq 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد.

اگر $|A| = 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

دترمینان:

۱. ماتریس ۱×۱: $A=[a] \Rightarrow |A|=a$

۲. ماتریس ۲×۲: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$

روش اول: ساروس:

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

پاسخ: ستون‌های اول و دوم را دوباره می‌نویسیم:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۲ & -۱ & ۱ \end{array}\right| = (-۲-۶+۰)-(۱+۳+۰)=-۸-۴=-۱۲$$

روش دوم: دترمینان برحسب سطر یا ستون دلخواه:

برحسب سطر اول:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ?$$

$$|A|=۱\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix}+۲\times(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix}+(-۱)\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=+۱\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix}-۲\begin{vmatrix} ۰ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix}-۱\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱(-۲-۳)-۲(۰+۳)-۱(۰+۱)=-۵-۶-۱=-۱۲$$

نکته: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد و k یک عدد حقیقی آنگاه: $|kA|=k^n|A|$

نکته: اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس A باشد، آنگاه دترمینان آن معکوس دترمینان A است، مثلاً اگر $|A|=۵$ باشد، آنگاه $|A^{-۱}|=\frac{۱}{۵}$ است.

دترمینان ماتریس با دو سطر یا دو ستون یکسان صفر است.

دترمینان ماتریس قطری با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی برابر است.

فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی

نکته: صفحه دلخواه P و رویه مخروطی می‌توانند حالت‌های زیر را نسبت به هم داشته باشند که در هر حالت به فصل مشترک صفحه و رویه مخروطی یک «مقطع مخروطی» می‌گوییم.

۱. صفحه P بر محور رویه مخروطی عمود، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، دایره است.

۲. اگر صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، بیضی است.

۳. اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس AA نگذرد در این صورت یک سهمی خواهیم داشت (اگر صفحه P با همین شرایط از رأس A بگذرد، مقطع مخروطی حاصل یک خط است.)

۴. اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت مقطع مخروطی حاصل یک هذلولی است.

مکان هندسی‌های مهم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت، برابر مقدار ثابتی باشد یک دایره خواهد بود.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت h هستند، دو خط راست موازی d (در طرفین آن) و به فاصله h از آن است.

درس ۲: دایره

معادله دایره: معادله دایره‌ای که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ و اندازه شعاع آن R باشد، برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

معادله ضمنی دایره:

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ می‌تواند معادله دایره باشد. در واقع:

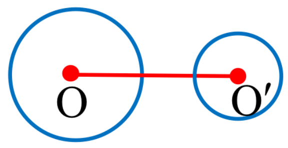
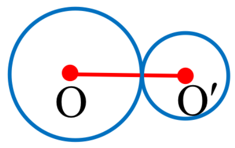
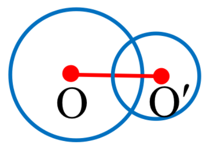
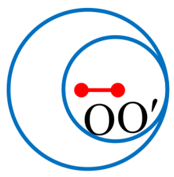
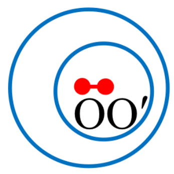
الف) اگر $a^۲+b^۲-۴c>۰$، آن‌گاه معاددله، حتماً معادله دایره است.

ب) اگر $a^۲+b^۲-۴c=۰$، آن‌گاه معادله، مربوط به یک نقطه است.

پ) اگر $a^۲+b^۲-۴c<۰$، آن‌گاه هیچ زوج‌مرتبی در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین مجموعه جواب معادله تهی خواهد بود.

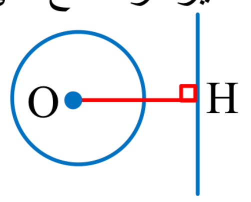
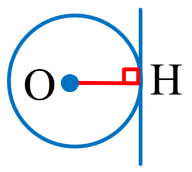
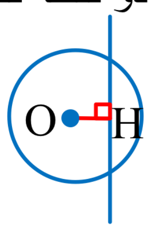
$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\Rightarrow\begin{cases}۰=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})\\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\end{cases}$$

دو دایره نسبت به هم دارای ۶ وضعیت هستند:

۱. متخارج $OO' > R+R'$ 	۲. مماس خارج (بیرون) $OO' = R+R'$ 
۳. متقاطع $\lvert R-R' \rvert < OO' < R+R'$ 	۴. مماس داخل (درون) $OO' = \lvert R-R' \rvert$ 
۵. متداخل $O < OO' < \lvert R-R' \rvert$ 	۶. هممرکز $OO' = 0$ 

وضعیت خط و دایره:

خط و دایره نسبت به هم سه وضعیت دارند:

الف) خط دایره را قطع نمی‌کند. 	**ب)** خط بر دایره مماس است. 	**پ)** خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. 

اگر $OH > R$ باشد، آنگاه حالت «الف» رخ داده است.

اگر $OH = R$ باشد، آنگاه حالت «ب» را خواهیم داشت.

اگر $OH < R$ باشد، آنگاه حالت «پ» رخ داده است.

وضعیت نقطه و دایره:

نقطه $A(x_A, y_A)$ و دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ داده شده است.

بعد از یافتن مرکز و شعاع دایره:

الف) اگر $OA > R$ باشد، A خارج دایره است.

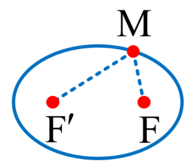
ب) اگر $OA = R$ باشد، A روی دایره است.

پ) اگر $OA < R$ باشد، A داخل دایره است.

درس ۳: بیضی و سهمی

بیضی

تعریف: بیضی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد. نقاط ثابت را کانون‌های بیضی می‌گوییم و با F و F' نمایش می‌دهیم و مقدار ثابت آن را با $۲a$ نمایش می‌دهیم.

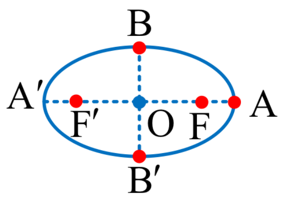


$$MF + MF' = ۲a$$

معرفی نقاط بیضی:

هر بیضی دارای ۷ نقطه مهم است:

طبق شکل:



A و A' : رئوس اصلی بیضی — B و B' : رئوس فرعی بیضی

F و F' : کانون‌های بیضی — O: مرکز بیضی

نکات بیضی:

۱. O وسط A و A'، B و B'، F و F' قرار دارد، یعنی: $\begin{matrix} OA = OA' \\ OB = OB' \end{matrix}$

۲. AA' را قطر بزرگ بیضی نامیده و طول آن برابر $۲a$ است، پس: $OA = OA' = a$

۳. BB' را قطر کوچک بیضی نامیده و طول آن بر ابر $۲b$ است، پس: $OB = OB' = b$

۴. FF' را فاصله کانونی بیضی نامیده و طول ان برابر $۲c$ است، پس: $OF = OF' = c$

۵. بین a، b و c رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $a^۲ = b^۲ + c^۲$ در نتیجه: $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$

۶. $BF = BF' = B'F = B'F' = a$

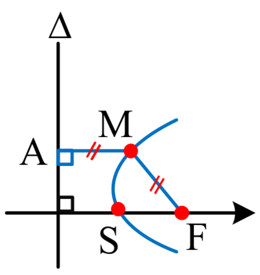
۷. مقدار $\frac{c}{a}$ را در بیضی، خروج از مرکز می‌نامیم و عددی است بین صفر و یک. هر چقدر این عدد به صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر است و هر چقدر این عدد به یک نزدیک شود، بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ شود، بیضی تبدیل به دایره می‌شود و در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ شود، بیضی تبدیل به پاره‌خط AA' خواهد شد.

سهمی

تعریف: سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام «کانون» و از یک خط ثابت به نام «خط هادی» به یک فاصله باشند. (نقطه خارج خط است.)

F کانون و S رأس سهمی نامیده می‌شود.



معادلات سهمی در حالتی که $S(h,k)$:

الف) سهمی افقی:

$$(y-k)^{2}=4a(x-h)$$

اطلاعات:

رأس $:S=(h,k)$ کانون $:F=(h+a,k)$

هادی $:\Delta:x=h-a$ دهانه راست $x>0$

محور تقارن $:y=k$ دهانه چپ $a<0$

ب) سهمی قائم:

$$(x-h)^{2}=4a(y-k)$$

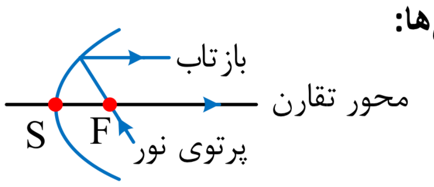
اطلاعات:

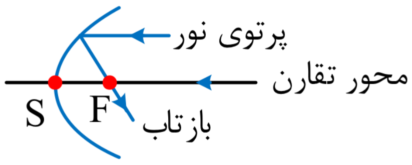
رأس $:S=(h,k)$ کانون $:F=(h+k+a)$

هادی $:\Delta:y=k-a$ دهانه بالا $a>0$

محور تقارن $:\ x=h$ دهانه پایین $a<0$

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها:



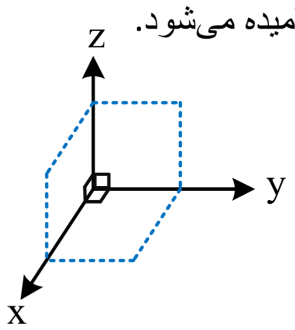


فصل ۳: بردارها

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$:

مجموعه تمام سه تایی‌های مرتب (x,y,z) که $x,y,z\in\mathbb{R}$ هستند. $\mathbb{R}^{3}=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}$

فضای $\mathbb{R}^3$ از سه محور دو به دو عمود بر هم تشکیل می‌شود که محور xها و yها و zها نامیده می‌شود.



این ۳ محور طبق شکل تشکیل ۳ صفحه خاص می‌دهند:

۱. صفحه xoy (کف): $z=0$

۲. صفحه xoz (دیوار چپ): $y=0$

۳. صفحه yoz (دیوار راست): $x=0$

تذکر: در دو بعد، محورهای x و y تشکیل چار ناحیه می‌داند. در سه بعد محورهای x، y z تشکیل هشت ناحیه می‌دهند.

چهار ناحیه با $z>0$ و چهار ناحیه با $z<0$

ناحیه اول: $x,y,z>0$	ناحیه دوم: $x<0,y>0,z>0$
ناحیه سوم: $x<0\ ,\ y<0\ ,\ z>0$	ناحیه چهارم: $x>0,y<0,z>0$
ناحیه پنجم: $x>0,y>0,z<0$	ناحیه ششم: $x<0,y>0,z<0$

ناحیه هفتم: $x<۰, y<۰, z<۰$	ناحیه هشتم: $x>۰, y<۰, z<۰$

فاصله دو نقطه از هم در فضا:

$$A(x_A, y_A, z_A) \qquad B(x_B, y_B, z_B)$$

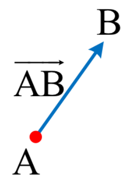
$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲ + (z_B - z_A)^۲}$$

مختصات نقطه M وسط پاره‌خط واصل A و B:

$$m = (\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}, \frac{z_A + z_B}{۲})$$

بردارها در $\mathbb{R}^۲$:

هر پاره‌خط جهت‌دار مانند AB یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B است.



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (x_B - x_A)^۲}$$

اعمال جبری روی بردارها:

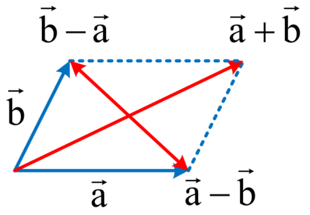
اگر $\vec{a} = (a_۱, a_۲)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲)$، آن‌گاه:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_۱ \pm b_۱, a_۲ \pm b_۲)$$

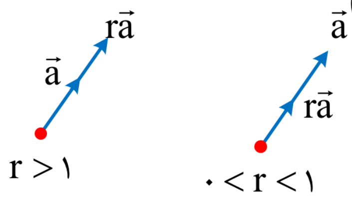
$$\overrightarrow{ra} = (ra_۱, ra_۲)\ ,\ r \in \wp\mathbb{R}$$

تعبیر هندسی:

الف)



ب)



تذکر: بیان بردار توسط بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$:

$$\vec{a} = (a_۱, a_۲) = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j}$$

مثلاً:

$$\vec{a} = (۲, ۳) = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$$

بردارها در $\mathbb{R}^۳$:

طول بردار $\vec{a}$ برابر است با: $|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$

بردارهای $\vec{i} = (۱, ۰, ۰)$ و $\vec{j} = (۰, ۱, ۰)$ و $\vec{k} = (۰, ۰, ۱)$ را بردارهای یکه در جهت محور xها، محور yها و محور zها می‌نامیم.

$$\vec{a} = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$$

خواص جمع بردارها:

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$	$a + \vec{o} = \vec{a}$	$a + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
$\vec{b} = r\vec{a} \Rightarrow \lvert\vec{b}\rvert = \lvert r\rvert \lvert\vec{a}\rvert$	$(rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$	$(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$	$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$

ضرب داخلی و خارجی بردارها:

$$\cos\theta=\frac{a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳}{|\vec a||\vec b|} \quad ، \quad \vec a.\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta \quad ، \quad \vec a.\vec b=a_۱b\ +a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

خواص ضرب داخلی:

$\vec a.(\vec b+\vec c)=\vec a.\vec b+\vec a.\vec c$	$\vec a.\vec a=\lvert\vec a\rvert^۲$	$\vec a.\vec b=\vec b.\vec a$
مساوی کشی- شوارتز: $\lvert\vec a.\vec b\rvert\le\lvert\vec a\rvert\lvert\vec b\rvert$	$\vec a.\vec o=\vec o.\vec a=۰$	$\vec a.\vec b=۰\Leftrightarrow\vec a\perp\vec b$

اتحادها:

$$|\vec a+\vec b|^۲=|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+۲\vec a.\vec b \quad \text{و} \quad |\vec a-\vec b|^۲=|\vec a|^۲+|\vec b|^۲-۲\vec a.\vec b$$

$$|\vec a+\vec b+\vec c|^۲=|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+|\vec c|^۲+۲(\vec a.\vec b+\vec b.\vec c+\vec c.\vec a)$$

تصور قائم بردار $\vec a$ بر بردار $\vec b$: $\vec a'=\dfrac{\vec a.\vec b}{|\vec b|^۲}\vec b$

ضرب خارجی دو بردار:

مثال: اگر $\vec a=(۱,-۱,۲)$ و $\vec b=(۰,۱,۱)$ بردار $\vec a\times\vec b$

$$\vec a\times\vec b=\left|\begin{array}{ccccc}\vec i & \vec j & \vec k & & \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱\end{array}\right|=(-۳,-۱,۱)$$

$$-۳ \quad -۱ \quad ۱$$

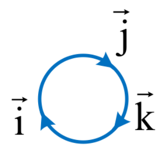
نکته: محاسبه طول بردار و ضرب خارجی دو بردار به کمک زاویه: $|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta$

ضرب خارجی و داخلی بردارهای یکه:

۱) $\vec i.\vec i=\vec j.\vec j=\vec k.\vec k=۱$

۲) $\vec i.\vec j=\vec j.\vec i=\vec i.\vec k=\vec j.\vec i=\vec j.\vec k=\vec k.\vec j=۰$

۳) $\vec i\times\vec i=\vec j\times\vec j=\vec k\times\vec k=\vec o$

طبق دایره  داریم:

$$\text{۴)}\begin{cases}\vec i\times\vec i=\vec k & \vec j\times\vec i=-\vec k\\ \vec j\times\vec k=\vec i & \vec k\times\vec j=-\vec i\\ \vec k\times\vec i=\vec j & \vec i\times\vec k=-\vec j\end{cases}$$

نکته: بین ضرب داخلی دو بردار و طول ضرب خارجی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ رابطه زیر برقرار است:

$$\left|\vec a\times\vec b\right|^{۲}+(\vec a\times\vec b)^{۲}=\left|\vec a\right|^{۲}\left|\vec b\right|^{۲}$$

خواص ضرب خارجی:

۱. طبق تعریف $\vec a\perp\vec b\perp\vec b$ و $\vec a\times\vec b\perp\vec a$، پس $\vec b.(\vec a\times\vec b)=۰$ و $\vec a.(\vec a\times\vec b)$.

۲. $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$

۳. $\left|\vec a\times\vec b\right|=\left|\vec b\times\vec a\right|$

۴. $\vec a\times\vec a=\vec a$

۵. $r(\vec a\times\vec b)=r\vec a\times\vec b=\vec a\times r\vec b$

۶. $\begin{cases}\vec a\times(\vec a+\vec b)=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c\\ (\vec a+\vec b)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c\end{cases}$

۷. $\vec a \parallel \vec b \Leftrightarrow \vec a\times\vec b=\vec o$

نکته مهم: مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده روی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با: $S=\left|\vec a\times\vec b\right|$

در نتیجه مساحت مثلث ساخته شده روی $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\left|\vec a\times\vec b\right|$

اندازه ارتفاع وارد بر بردار a در مثلث یا متوازی‌الاضلاع: $h=\frac{|a\times b|}{|a|}$

حجم این متوازی‌السطوح برابر است با: $v=\left|\vec a.(\vec b\times\vec c)\right|$

تذکر: هرگاه $\vec a.(\vec b\times\vec c)$، آنگاه سه بردار $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ در یک صفحه واقع‌اند.

اندازه ارتفاع وارد بر قاعدهٔ متوازی‌السطح که با دو بردار a و bساخته شده است: $h=\frac{|a.(b\times c)|}{|a\times b|}$