آموزشگاه کنکور الوند

گسسته

پایه دوازدهم

کل کتاب

برای دسترسی به خلاصه تمامی دروس و تهیه پکیج امتحان نهایی با مادر ارتباط باشید.

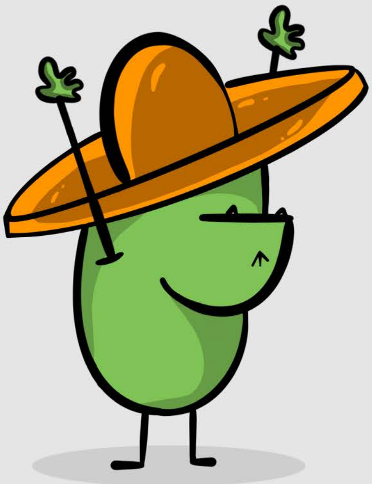
۰۷۱۳۸۲۲۹۵۵۰
۰۹۱۷۴۴۴۷۸۵۲

۰۹۳۸۴۳۷۷۸۵۲
۰۹۳۸۳۷۲۷۸۵۳

بخش مشاوره
۰۹۳۶۴۱۶۰۷۱۳

www.alvandedu.com
alvandinst
alvand_moshaver
khosravimathematics

تو حتما توی امتحان ها موفق میشی



فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

اثبات به روش مستقیم:

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف):

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ای، به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض اولیه می‌رسیم.

اثبات بازگشتی:

دو حکم را معادل یا هم‌ارزی می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف عاد کردن: گوییم عدد صحیح $a\ (a \neq 0)$، عدد b را می‌شمارد و می‌نویسیم« $a|b$ » هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد، به طوری‌که $b = aq$.

$$\begin{cases} a|b \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq$$

در این صورت می‌گوییم b بر a بخش‌پذیر است.

ویژگی‌های عاد کردن:

ویژگی ۱: $\begin{cases} a|b \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a|mb$

نتیجه مهم: $\begin{cases} a|b \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a|b^n$

تذکر مهم: اگر $a|bc$ آن‌گاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a|b$ یا $a|c$

نکته: $\begin{cases} a|b \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ka|kb$

ویژگی ۲: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

ویژگی ۳: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

تذکر: اگر $a|b+c$ ، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت: $a|b$ یا $a|c$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ و a، آن‌گاه $|a| \leq |b|$

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ ، آن‌گاه $|a| = |b|$

نکته: سه خاصیت مهم دیگر از رابطه عاد کردن عبارت‌اند از:

۱. $\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd$ ۲. $\begin{cases} a|b \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^n|b^n$ ۳. اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد (ب.م.م):

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. d هر دو عدد a و b را عاد کند ($d|a$ و $d|b$).

۲. عددی بزرگ‌تر از d وجود نداشته باشد که a و b را عاد کند، یعنی اگر m ای وجود داشته باشد که: $m|a$ و $m|b$، آن‌گاه m از d بزرگ‌تر نیست. $(m\le d)$ در این صورت می‌نویسیم: $d=(a,b)$

نکته مهم: اگر $a|b$، ان‌گاه $(a,b)=|a|$

تذکر: دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از یک نداشته باشند، یعنی $(a,b)=۱$.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

۱. a و b هر دو عدد c را عاد کنند. $(a|c,\ b|c)$

۲. عددی کوچک‌تر از c وجود نداشته باشد که a و b « عدد را عاد کنند، یعنی اگر m ای طبیعی وجود داشته باشد که: $a|m\ ,\ b|m$، آن‌گاه $c\le m$.

نکته مهم: اگر $a|b$، آن‌گاه $[a,b]=|b|$

قضیه تقسیم و کاربردها:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعداد صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند که:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array} \Rightarrow a=bq+r\ ;\ ۰\le r<b$$

a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را در خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

افراز مجموعه Z: با توجه به قضیه تقسیم، اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد با تقسیم a بر عدد طبیعی B، $a=bq+r\ ;\ ۰\le r<b$ برای باقی‌مانده b، r حالت به وجود می‌آید.

$r=۰,۱,۲,\dots,b-۱$

مثلاً در تقسیم a بر عدد طبیعی ۳:

$$a = ۳q + r \ ; \ r = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳q \\ a = ۳q + ۱ \\ a = ۳q + ۲ \end{cases}$$

یعنی مجموعه اعداد صحیح به سه قسمت افراز شده است.

درس ۳: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$ ، آن‌گاه می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به پیمانه m» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$.

تعریف کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m:

تمام اعداد صحیح که در تقسیم بر m، باقی‌مانده r داشته باشند را در یک مجموعه قرار می‌دهیم و آن را کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ یا A_r نمایش می‌دهیم.

$$A_r = [r]_m = \{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

ویژگی ۱: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

ویژگی ۲: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

تذکر: عکس این ویژگی لزوماً برقرار نیست، یعنی: $ac \overset{m}{\equiv} bc \not\Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

ویژگی ۳: $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

ویژگی ۴: $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

تذکر مهم: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} r$

نتیجه مهم:

۱. هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به دست آوریم.

۲. اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m باقی‌مانده یکسان داشته باشند، در این صورت b و a به پیمانه m هم‌نهشت هستند.

ویژگی ۵: می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

ویژگی ۶: تقسیم در هم‌نهشتی:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ (m, c) = d \end{cases} \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نکته مهم: تعیین رقم یکان: برای پیدا کردن رقم یکان عدد A، باید از هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰ استفاده کنیم.

باقی‌مانده تقسیم بر اعداد خاص:

الف) باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی A بر ۹:

عدد n رقمی $A=a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا آن را در مبنای ۱۰ بسط می‌دهیم:

$$A=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+\dots+10^{n-1}a_{n-1}$$

اما $10\overset{9}{\equiv}1$ در نتیجه برای هر k طبیعی $10^k\overset{10}{\equiv}1$.

$$A\overset{10}{\equiv}a_0+1\times a_1+1^2\times a_2+1^3\times a_3+\dots+(1)^{n-1}\times a_{n-1}$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}a_0+a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم A بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام A بر ۹.

ب) باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی A بر ۳

باقی‌مانده تقسیم A بر ۳ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام A بر ۳.

پ) باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی A بر ۱۱:

$$A\overset{11}{\equiv}a_0-a_1+a_2-a_3+\dots\pm a_{n-1}$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم A بر ۱۱ از سمت راست، یک در میان ارقام را جمع و تفریق کرده و باقی‌مانده تقسیم را بر ۱۱ به دست می‌آوریم.

ت) باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی A بر ۲ یا ۵ یا ۱۰:

باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ برابر است با باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ یا ۵ یا ۱۰.

کاربرد هم‌نهشتی در تقویم نگاری:

در تقویم نگاری از هم‌نهشتی در پیمانه ۷ استفاده می‌کنیم.

معادله هم‌نهشتی:

یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_0\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کنند، یعنی $(a,b\in\mathbb{Z})ax_0\overset{m}{\equiv}b$

نکته مهم: معادله هم‌نشهتی $ax\overset{5}{\equiv}b$ جواب صحیح دارد، هرگاه $(a,m)|b$.

معادله سیاله خطی:

هر معادله به فرم $ax+by=c$ را در مجموعه اعداد صحیح $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ یک معادله سیاله خطی می‌نامیم. منظور از حل این معادله، پیدا کردن مجموعه جواب‌های x و y صحیح است که در معادله صدق کند. یک معادله سیاله، در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد، هرگاه $(a,b)|c$.

نحوه حل معادله سیاله:

برای حل معادله سیاله خطی $ax+by=c$ آن را تبدیل به معادله هم‌نهشتی به یکی از دو صورت $ax\overset{b}{\equiv}c$ یا $by\overset{a}{\equiv}c$ می‌کنیم. با پیدا کردن یکی از متغیرها و جای‌گذاری در معادله اولیه، متغیر دیگر حاصل می‌شود.

فصل ۲: گراف و مدل‌سازی

درس ۱: معرفی گراف

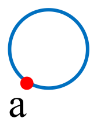
به لحاظ شهودی گراف شکل هندسی متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوط است که این خطوط بعضی نقاط را به هم وصل می‌نماید.

اجزای گراف عبارتند از:

رأس: به هر یک از نقاط در گراف، یک رأس می‌گوییم.

یال: به هر یک از خطوط در گراف یک یال می‌گوییم.

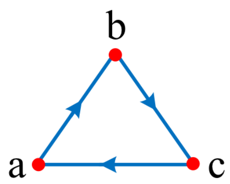
طوقه: یالی که از یک رأس شروع و به خود آن ختم گردد را طوقه می‌گوییم.



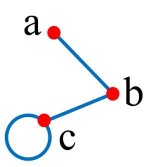
دو یال موازی: هرگاه بین دو رأس، دو یال وجود داشته باشد، آن دو یال را موازی می‌گوییم.

انواع گراف عبارتند از:

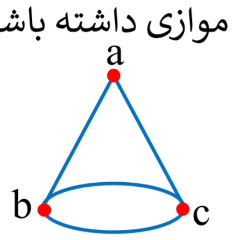
گراف جهت‌دار: گرافی که روی یال‌هایش جهت وجود داشته باشد.



گراف چندگانه: گرافی که یال جهت‌دار نداشته باشد. این گراف می‌تواند طوقه یا یال موازی داشته باشد، مانند:



و



گراف ساده: گرافی بدون جهت و طوقه که بین هر دو ردس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد.

تعیین دقیق گراف: گراف $G(V,E)$ که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است.

اعضای V را رئوس G و اعضای E را یال‌های G می‌نامیم.

تعاریف و اصطلاحات گراف ساده

رئوس مجاور (همسایه):

هرگاه دو رأس با یک یکال به هم وصل شوند، گوییم دو رأس مجاورند.

مجموعه همسایه‌های یک رأس:

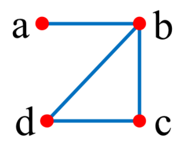
فرض می‌کنیم a یک ردپاس از گراف G باشد. به مجموعه رئوسی از G که به راس a متصل باشد، «همسایگی باز رأس a» می‌گوییم و با $N_G(a)$ نشان می‌دهیم. اگر خود رأس a را به این مجموعه اضافه کنیم، آن‌گاه همسایگی بسته رأس a حاصل می‌شود و با نماد $N_G[a]$ نشان می‌دهیم:

$$N_G(a)=\{b\in V(G), ab\in E(G)\}$$

$$N_G[a]=N_G(a)\cup\{a\}$$

دو یال مجاور:

دو یال را مجاور می‌گوییم، هرگاه در یک رأس مشترک باشند، مثلاً در گراف



یال‌های ab، bc و bd با هم مجاورند، اما یال cd با یال ab مجاور نیست.

مرتبه گراف: تعداد رئوس یک گراف است و با p نمایش می‌دهیم.

اندازه گراف: تعداد یال‌های یک گراف است و با q نمایش می‌دهیم.

درجه رأس: تعداد یال‌های متصل به یک رأس را درجه آن رأس را می‌نامیم و با نماد deg نشان می‌دهیم.

رأس تنها: رأسی که درجه‌اش صفر است، یعنی به هیچ رأس دیگری وصل نباشد را رأس تنها می‌نامیم.

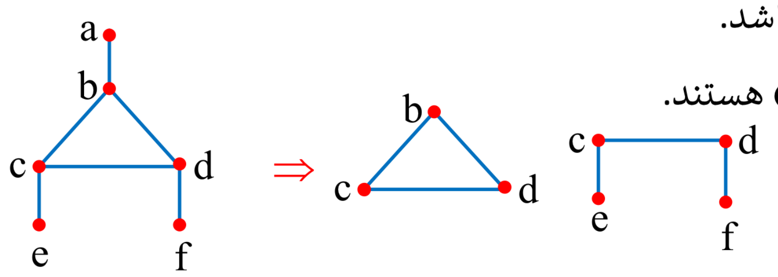
رأس فول: رأسی که به همه رئوس دیگر وصل باشد را رأس فول می‌نامیم، چنین رأسی درجه‌اش $p-1$ است.

رأس زوج و فرد: اگر درجه رأسی زوج باشد، آن را رأس زوج و اگر درجه‌اش فرد باشد، آن را رأس فرد می‌نامیم.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس را ماکسیمم درجه می‌گوییم و با نماد $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

زیرگراف: یک زیرگراف از گراف g، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.

مثلاً گراف‌های G_1 و G_2 در شکل زیر، زیرگراف‌هایی از گراف G هستند.



(G) (G_1)

گراف تهی: گرافی که تمام رئوس آن تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، منظور از گراف تهی n رأسی، گرافی شامل n رأس تنها و بدون یال است.

قضیه: در هر گراف ساده از مرتبه p، مجموع درجات رئوس زوج است و براب راست با دو برابر تعداد یال‌ها. $\sum_{i=1}^{p}\deg(V_i)=2q$

نتیجه: تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی زوج است.

مکمل یک گراف: گراف ساده $G(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. مکمل آن را با نماد $\overline{G}$ نشان می‌دهیم و گرافی است با همان مجموعه رئوس V و با مجموعه همه یال‌هایی که در گراف G رسم نشده باشند. به عبارتی، اگر گراف‌های G و $\overline{G}$ را بر هم منطبق کنیم، گرافی حاصل می‌شود که تمام یال‌های آن رسم شده است.

گراف کامل: گراف ساده‌ای که هر دو رأس آن مجاور هم باشند را گراف کامل می‌نامیم. در این گراف درجه تمام رئوس برابر $p-۱$ است، یعنی همه رئوس فول هستند. تعداد یال‌ها در این گراف را با q_{max} نشان می‌دهیم و برابر است با:

$q_{max}=\frac{p(p-۱)}{۲}$ که p مرتبه گراف است.

گراف کامل از مرتبه p را با نماد k_p نشان می‌دهیم.

نکته: در گراف کامل: $\delta=\Delta=p-۱$

تذکر: مکمل گراف کامل k_p گراف تهی از مرتبه p است.

نکته مهم: اگر $\overline{G}$ مکمل گراف G باشد، آن‌گاه:

الف) $q(G)+q(\overline{G})=q_{max}$

ب) اگر a یک رأس از گراف G باشد، «گاه: $\deg_G(a)+\deg_{\overline{G}}(a)=p-۱$

گراف r- منتظم: گراف ساده G را $r-$منتظم از مرتبه p می‌نامیم هرگاه درجه همه رئوس آن برابر با r باشد.

از آن‌جایی که مجموع درجات رئوس گراف برابر با $۲q$ است، پس:

$$r+r+...+r=۲q \Rightarrow pr=۲q \Rightarrow q=\frac{pr}{۲}$$

تذکر: از آن‌جایی که r درجه رأس است، پس: $۰\le r\le p-۱$.

مسیر: اگر a و b دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر ازه به b (یک مسیر $a-b$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از a شروع و به b ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر).

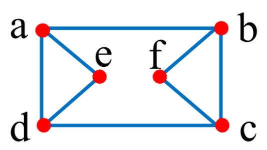
قرار داد می‌کنیم که یک دنباله متشکل از تنها یک رأس a، یک مسیر با طول صفر از رأس a به خودش است.

نکته: گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با p_n نمایش می‌دهیم. مثلاً $p_۳$ برابر است با:()

همچنین $p_۶$ برابر است با ()

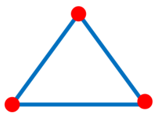
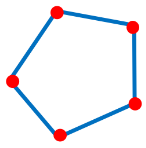
دور: دنباله $v_۱v_۲v_۳...v_nv_۱$ $(n\ge ۳)$ از رئوس دو به دو متمایز (به جز اولی و آخری) که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

مثلاً در گراف روبه‌رو:



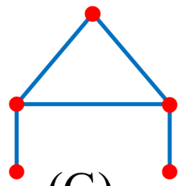
دور abcda یک دور به طول ۴ و دور aedcfba یک دور به طول ۶ است.

نکته: گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.

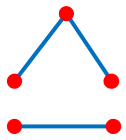
مثلاً $C_۳$ به صورت () است همچنین $C_۵$ به صورت () هستند.

همبندی و ناهمبندی:

گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. مثلاً در شکل مقابل گراف G همبند و گراف H ناهمبند است.



(G)

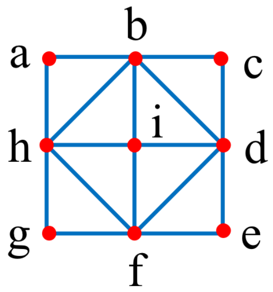


(H)

درس ۲: مدل‌سازی با گراف

تعریف: زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأس از گراف G یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

مثلاً برای گراف‌روبه رو:



مجموعه $D=\{b,d,f,h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، زیرا هر رأس از گراف که در این مجموعه نیست، حداقل به یکی از رأس‌های این مجموعه وصل است. اما مجموعه $\{a,c,e,g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نیست، زیرا رأس i در این مجموعه نیست و به هیچ‌کدام از اعضای مجموعه نیز وصل نیست.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گر که کم‌ترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات برای راحتی، به یک مجموعه احاطه‌گر مینیم از گراف G، یک $\gamma-$ مجموعه می‌گوییم.

مثلاً برای گراف روبه رو:

تعریف: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

تذکر: توجه کنید که یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال، لزوماً مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیست اما برعکس آن درست است، یعنی هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، حتماً احاطه‌گر مینیمال است.

قضیه: در گراف G از مرتبه p با ماکسیمم درجه Δ، $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{p}{\Delta+1}\right\rceil$.

فصل ۳: ترکیبات (شمارش)

درس ۱: مباحثی در ترکیبات

جایگشت n شیء متمایز: تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شی متمایز کنار هم برابر است با $n!$. مثلاً اعداد ۱، ۲، ۳ را به $۳!=۶$ حالت می‌توان کنار هم چید.

نکته: هرگاه بخواهیم در جایگشت n شی تعدادی از آن‌ها همواره کنار هم باشند، کافی است آن ها را در یک دسته قرار دهیم. یک بار جایگشت کل دسته را با بقیه اشیا حساب کنیم و یک بار جایگشت اشیا درون دسته. سپس اعداد به دست آمده را در هم ضرب می کنیم.

نکته: هرگاه بخواهیم اشیا دو دسته A و B را به صورت یک در میان بچینیم دو حالت مطرح می‌شود:

الف) تعداد اشیاء دو دسته برابر n باشند، در این صورت تعداد جایگشت مطلوب برابر است با: $۲\times n!\times n!$

ب) تعداد اشیاء دو دسته یک واحد اختلاف داشته باشند، در این صورت تعداد جایگشت مطلوب برابر است با:

$$n!\times(n-۱)!$$

که n و $n-۱$ تعداد اشیاء دو دسته A و B هستند.

نکته مهم: جایگشت‌های با تکرار: اگر n شی مفروض باشند، به طوری که $n_۱$ تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از n نوع k ام یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\ldots\times n_k!}$$

نکته مهم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\ldots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

تذکر: اگر شرط روی متغیرها از صفر شروع نمی‌شد، باید مجموع شروط را از n کم کرده و سپس با n جدید مانند قبل، مسئله را حل کنیم.

مربع‌های لاتین:

یک جدول مربعی از اعداد $۱,۲,\ldots,n$ به شکل یک مربع $n\times n$ که سطرها و ستون‌های آن با عددهای $۱,۲,\ldots,n$ پر شده باشند به طوری که در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک مربع لاتین می‌نامیم. مثلاً مربع‌های زیر مربع لاتین هستند.

۴	۳	۲	۱
۱	۴	۳	۲
۲	۱	۴	۳
۳	۲	۱	۴

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

مربع لاتین چرخشی:

در این حالت کلی می‌توانیم یک مربع لاتین از مرتبه n به صورت مقابل بسازیم. این مربع لاتین را مربع لاتین چرخشی می گوییم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

نتیجه: برای هر n طبیعی، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

ساختن مربع لاتین از روی مربع لاتین دیگر:

۱. با جابه‌جایی دو سر یا دو ستون در مربع لاتین اولیه، مربع لاتین جدید ساخته می‌شود.

مثلاً در مربع لاتین مقابل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

با جابه‌جایی سطر ۱ و ۳ مربع لاتین جدیدی ایجاد می‌شود.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۲. با جایگشت روی اعداد به کار رفته در مربع لاتین اولیه، می‌توان لاتین جدید ساخت.

مثلاً در مربع لاتین

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

جایگشت $\begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{matrix}$ را در نظر می‌گیریم. مربع لاتین مقابل حاصل می‌شود.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

دو مربع لاتین متعامد:

A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه هستند. از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانه آن شامل یک عدد دو رقمی است که رقم‌های سمت چپ مربوط به A و رقم‌های سمت راست مربوط به B است (یا برعکس). اگر هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع تکرار نشده باشند، می‌گوییم A و B متعامد هستند. مثلاً دو مربع لاتین زیر متعامدند:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

A

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B

زیرا از کنار هم قرار دادن آن‌ها مربع مقابل حاصل می‌شود:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

که هیچ عدد دو رقمی تکراری در آن نیست.

برای هر n طبیعی و $n \neq ۱,۲,۶$ دومربع لاتین متعامد وجود دارد.

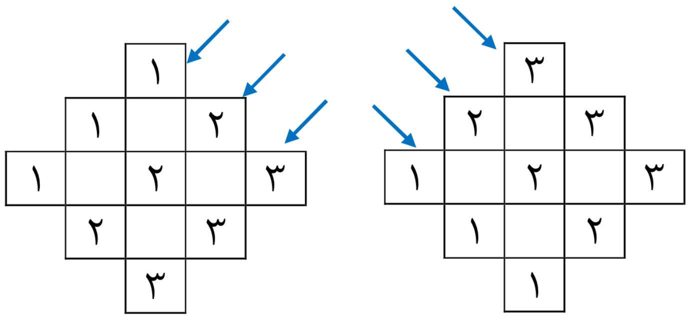
نکته ۱: مربع لاتینی که از جایگشت یک مربع لاتین حاصل می‌شود با مربع اولیه متعامد نیست.

نکته ۲: اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند و با اعمال جایگشت دلخواه روی A، مربع C ایجاد شود، آن‌گاه مربع‌های B و C نیز متعامدند.

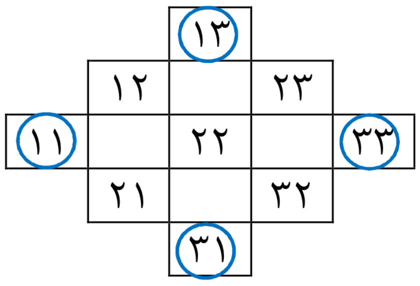
تذکر: اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند و با جابه‌جایی سطر یا ستون روی A، مربع لاتین C ایجاد شود، آن‌گاه لزوماً C و B متعامد نخواهند بود.

ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:

فرض کنید می‌خواهیم دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بسازیم. دو مربع ۳ × ۳ همانند دو شکل مقابل ایجاد می‌کنیم و ارقام ۱ تا ۳ را مانند شکل آن‌ها می‌چینیم:



اکنون این دو شکل را با هم ترکیب می‌کنیم:



اکنون عددهای خارج مربع را که دور آن‌ها دایره کشیده‌ایم، به طریق زیر به داخل مربع می‌آوریم:

۱۳ ← ۳ واحد پایین
۳۱ ← ۳ واحد بالا
۳۳ ← ۳ واحد به چپ
۱۱ ← ۳ واحد به راست

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

در نتیجه دو مربع لاتین متعامد

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

و

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

را ساخته‌ایم.

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

اصول شمول و عدم شمول:

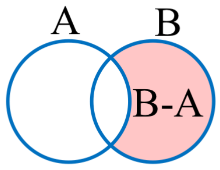
الف) برای هر دو مجموعه A و B داریم: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

ب) برای هر سه مجموعه A، B و C داریم:

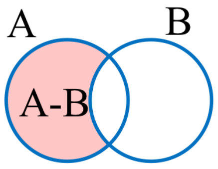
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

تذکر: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر عدد طبیعی k بخش‌پذیر هستند، برابر $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

نکته: **قوانین تفاضل**



$|B-A|=|B|-|A\cap B|$



$|A-B|=|A|-|A\cap B|$

توابع پوشا و یک‌به‌یک:

دو مجموعه $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ مفروض‌اند. منظور از یک تابع از A به B حالت خاصی از یک رابطه از A به B است که به هر عضو A، یک و فقط یک عضو B نسبت داده شود.

تذکر: در نمودار «ون» باید از هر عضو A، یک و تنها یک پیکان خارج شده باشد تا رابطه ایجاد شده تابع باشد.

تابع ۱-۱: تابع $f:A\to B$ یک‌به‌یک است هرگاه هیچ یک از اعضای B نظیر به بیش از یک عضو از اعضای A قرار نگرفته باشد.

تابع پوشا: تابع $f:A\to B$ را پوشا می‌نامیم هرگاه به تمام اعضای B پیکان وارد شده باشد، یعنی تمام اعضای B تحت پوشش رابطه قرار گرفته باشند.

نکات مهم:

۱. تعداد کل توابع از A به B: $f:A\to B$ برابر است با: $|B|^{|A|}$

۲. تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B:

الف) اگر $n>m$ باشد، هیچ تابع یک‌به‌یکی از A به B وجود ندارد.

ب) اگر $n=m$ باشد، تعداد توابع یک‌به‌یک برابر است با $n!$.

پ) اگر $n<m$ باشد، تعداد توابع یک‌به‌یک برابر است با: $n!$.

۳. تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B:

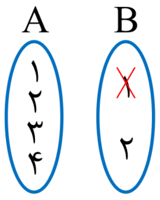
الف) اگر $n<m$ باشد، هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

ب) اگر $n=m$ باشد، تعداد توابع پوشا برابر است با $n!$.

پ) اگر $n>m$ باشد، تعداد توابع پوشا از اصل شمول و عدم شمول محاسبه می‌شود.

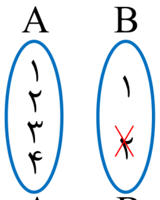
توابع غیرپوشا:

عدد ۱ در مجموعه B تحت پوشش قرار نگیرد:



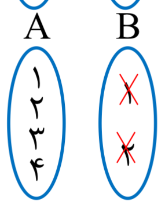
$\Rightarrow ۱^{۴}=۱$

عدد ۲ در مجموعه B تحت پوشش قرار نگیرد:



$\Rightarrow ۱^{۴}=۱$

هر دو عدد ۱ و ۲ در مجموعه B تحت پوش قرار نگیرند:



$\Rightarrow ۰^{۴}=۰$

در نتیجه تعداد توابع پوشا غیرپوشا برابر است با: $۱-۰=۰$

تعداد توابع پوشا: $۱۶-۲=۱۴$

اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشند $(m>n)$، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که دست‌کم دو یا بیشتر از دو کبوتر در ا« قرار دارد. مسائل اصل لانهٔ کبوتری بر دو نوع هستند: **جبری و هندسی**

در مسائل جبری مهم آن است که m و n را به درستی تشخیص دهیم و در مسائل هندسی رسم شکل مناسب و تعداد تقسیم‌بندی‌ها (که همواره یکی کم‌تر از تعداد نقاط داده شده است) مفید خواهد بود.

مثال: (تیپ جبری) S یک زیرمجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای X را بر ۳۶ تقسیم کنیم، ثابت کنید حداقل ۲عضو از این مجموعه دارای باقی‌مانده یکسان بر ۳۶ هستند.

پاسخ: باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳۶ یکی از اعداد مجموعه $\{۰,۱,۲,...,۳۵\}$ است. اگر اعضای S (۳۷ عضو) را کبوترها (m تا) و باقی‌مانده‌ها را به عنوان لانه‌ها (n تا) د ر نظر بگیریم، آن‌گاه: $m=۳۷$ و $n=۳۶$.

چون $m>n$، بنابراین حداقل ۲ عوض. هم باقی‌مانده هستند.

تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیشتر در nلانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای هستند که در آن حداقل $k+۱$ کبوتر باشد.

مثال: (تیپ هندسی) حداقل چند نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ قرار دهیم تا مطمئن شویم حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله بین آن‌ها از $\frac{۱}{۳}$ کمتر است.

پاسخ: هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۳ سمت مساوی تقسیم می‌کنیم. با وصل کردن آن‌ها به هم، ۹ تا مثلث کوچک خواهیم داشت که طول ضلع هر کدام $\frac{۱}{۳}$ است.

تعداد نقاط یکی باید از تعداد تقسیم‌بندی‌ها بیشتر باشد، پس باید ۱۰نقطه را در ۹ لانه قرار دهیم و طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه در یک لانه قرار می‌گیرند که فاصله آن‌ها از $\frac{۱}{۳}$ (ضلع مثلث کوچک) کم‌تر است.